Kapitel 14

Aufgabe 14.1

Ein Investor hat eine Aktie, die im Betrachtungszeitpunkt zu 250 notiert, zum Preis von 100 erworben. Hinsichtlich des zukünftigen Kursverlaufs ist bekannt, daß das Wertpapier mit Wahrscheinlichkeit 0,6 auf 350 steigen, mit Wahrscheinlichkeit 0,4 hingegen auf 150 fallen wird.
Der Investor bewertet riskante Alternativen gemäß Prospect-Theorie; seine Wertfunktion über Gewinne und Verluste relativ zum gesetzten Referenzpunkt lautet

- $x^{0,88}$ für x = 0
- $-2,25\,(-x)^{0,88}$ für x = 0

Zur Vereinfachung sei unterstellt, daß er keine Transformation der Wahrscheinlichkeiten vornimmt (bzw. äquivalent daß p(p) = p für alle p gilt).
Zeigen Sie, daß die gemäß Prospect-Theorie optimale Entscheidung zwischen den beiden Alternativen „Halten der Aktie" und „Verkaufen der Aktie" davon abhängig ist, ob der historische Kaufkurs oder die aktuelle Notierung der Aktie als Referenzpunkt fungiert.

Lösung 14.1

Fungiert der historische Kaufkurs als Referenzpunkt, so führt die Alternative „Halten der Aktie" mit Wahrscheinlichkeit 0,6 zu einem Gewinn von 250 (immer relativ zum Referenzpunkt), mit Wahrscheinlichkeit 0,4 zu einem Gewinn von 50. Demgegenüber bedeutet die Alternative „Verkaufen der Aktie" einen sicheren Gewinn von 150.
Die zugehörigen Bewertungen gemäß Prospect-Theorie sind:
- „Halten": PT(„Halten") = $0,6 \cdot 250^{0,88} + 0,4 \cdot 50^{0,88} = 89,84$
- „Verkaufen": PT(„Verkaufen") = $1 \cdot 150^{0,88} = 82,22$

Demzufolge wird die Alternative „Halten der Aktie" präferiert.

Fungiert dagegen die aktuelle Notierung als Referenzpunkt, so führt die Alternative „Halten der Aktie" mit Wahrscheinlichkeit 0,6 zu einem Gewinn von 100 (relativ zum „neuen" Referenzpunkt), mit Wahrscheinlichkeit 0,4 zu einem Verlust von 100. Demgegenüber bedeutet die Alternative „Verkaufen der Aktie" einen sicheren Gewinn/Verlust von 0.
Die zugehörigen Bewertungen gemäß Prospect-Theorie sind:
- „Halten": PT(„Halten") = $0,6 \cdot 100^{0,88} + 0,4 \cdot (-2,25) \cdot 100^{0,88} = -17,26$
- „Verkaufen": PT(„Verkaufen") = $1 \cdot 0^{0,88} = 0$

Demzufolge wird die Alternative „Verkaufen der Aktie" präferiert.

Trotz „objektiver Identität" der beiden Entscheidungssituationen verändert sich das Entscheidungsverhalten in Abhängigkeit von der Lage des Referenzpunkts.

Aufgabe 14.2

Ein Ganove steht vor der Wahl seines abendlichen Einbruchsobjekts. Die drei in Frage kommenden Objekte einschließlich Angaben über die mögliche Beute sind der nachstehenden Tabelle zu entnehmen:

Objekt	Art der Beute	Höhe der Beute
Kiosk	sicher	121
Dönerladen	risikobehaftet	gleichverteilt über [50; 250]
Juwelier	risikobehaftet	0 (prob. = 0,75) oder 900 (prob. = 0,25)

Der Ganove bewertet riskante Alternativen gemäß Prospect-Theorie; seine Wertfunktion über Gewinne und Verluste relativ zum gesetzten Referenzpunkt lautet

- x für x = 0
- ?x für x = 0 (? = 1)

Zur Vereinfachung sei unterstellt, daß er keine Transformation der Wahrscheinlichkeiten vornimmt (bzw. äquivalent daß p(p) = p für alle p gilt).
Als Referenzpunkt fungiert das (sichere) Einkommen aus seiner Zeit als Automatenaufbrecher in Höhe von 100.

(a) Welche Alternative wird er wählen, falls der Verlustaversionskoeffizient ? = 2 beträgt?

(b) Wie verändert sich die Entscheidung für ? = 6?

Was der Ganove nicht weiß: Er besitzt einen Gegenspieler in Gestalt eines Wachmanns. Dieser kann allerdings nur ein Objekt pro Abend bewachen. Trifft der Einbrecher auf das bewachte Objekt, muß er ohne Beute abziehen. Der Wachmann ist Erwartungsnutzenmaximierer, seine Nutzenfunktion über kraft seines Zutuns nicht entwendete Geldbeträge m lautet $u(m) = m^{0,5}$. Allerdings kennt der Wachmann den genauen Wert von ? (des Ganoven) nicht. Er hält die Werte ? = 2 und ? = 6 für gleich wahrscheinlich.

(c) Vor welchem Objekt wird sich der Wachmann postieren?

(d) Bei welcher Wahrscheinlichkeitsverteilung über die beiden möglichen Ausprägungen von ? kann der Wachmann zu Beginn seines Dienstes eine Münze werfen, um das am jeweiligen Abend zu bewachende Objekt zu bestimmen?

(e) Inwiefern würde das Kalkül des Wachmanns erschwert, wenn die (sichere) Beute im Kiosk 118,75 statt 121 betragen würde?

(f) Der Ganove ist cleverer als ursprünglich gedacht. Er weiß jetzt um die Existenz des Wachmanns und kennt dessen Kalkül (und damit auch dessen Strategie). Der Wachmann weiß jedoch nicht, daß der Ganove dieses Wissen besitzt. Zeigen Sie für den Fall, daß ? = 6 gilt, auf, daß die Strategie des Ganoven aus (b) nicht mehr optimal ist.

Lösung 14.2

(a) Die Bewertung riskanter Alternativen gemäß Prospect-Theorie berechnet sich als *å p(p$_i$) x v(x$_i$)* bzw. ohne Transformation der Wahrscheinlichkeiten als *å p$_i$ x v(x$_i$)*.
Im vorliegenden Fall ergibt sich:
PT(„Kiosk“) = 1 · v(21) = 21

PT(„Dönerladen“) = $\int_{-50}^{0} \frac{1}{200}(2x)dx + \int_{0}^{150} \frac{1}{200} x dx$ = 43,75

PT(„Juwelier“) = 0,75 · v(–100) + 0,25 · v(800) = 50
Der Ganove wählt folglich den Juwelier.

(b) Analog zu (a) ergeben sich nun folgende Bewertungen:
PT(„Kiosk“) = 21
PT(„Dönerladen“) = 18,75
PT(„Juwelier“) = –250
Der Ganove wählt folglich nun den Kiosk.

(c) Der Wachmann weiß, daß der Ganove im Falle von ? = 2 beim Juwelier, im Falle von ? = 6 in den Kiosk einbrechen wird.
Plant der Ganove einen Einbruch in den Kiosk und postiert sich der Wachmann ebendort, verhindert er mit Sicherheit einen Diebstahl in Höhe von 121. Plant der Ganove einen Einbruch beim Juwelier und postiert sich der Wachmann ebendort, verhindert er mit Wahrscheinlichkeit 0,25 einen Diebstahl in Höhe von 900, mit Wahrscheinlichkeit 0,75 einen Diebstahl in Höhe von 0.
Der Erwartungsnutzen der Aktion „Vor Kiosk postieren“ beträgt damit: EU(„Kiosk bewachen“) = prob(?=2) · u(0) + prob(?=6) · u(121) = 0,5 · $121^{0,5}$ = 5,5.
Der Erwartungsnutzen der Aktion „Vor Juwelier postieren“ beträgt demgegenüber:
EU(„Juwelier bewachen“) = prob(?=2) · (0,25 · u(900) + 0,75 · u(0)) + prob(? = 6) · u(0) = 0,5 · 0,25 · $900^{0.5}$ = 3,75.
Er wird sich folglich vor dem Kiosk postieren.

(d) Es sei q := prob(?=2). Da entweder ? = 2 oder ? = 6 gilt, ist prob(?=6) = 1 – prob(?=2) = 1 – q.
Der Erwartungsnutzen der Aktion „Vor Kiosk postieren“ beträgt (in Abhängigkeit von q): EU(„Kiosk bewachen“) = (1 – q) · u(121) = 11 · (1 – q).
Der Erwartungsnutzen der Aktion „Vor Juwelier postieren“ beträgt (in Abhängigkeit von q): EU(„Juwelier bewachen“) = q · (0,25 · u(900) + 0,75 · u(0)) = 7,5 · q.
Der Wachmann ist indifferent zwischen den beiden Strategien g.d.w. 11 · (1 – q) = 7,5 · q . Dies gilt bei einer Wahrscheinlichkeit von ca. 59,5 %.

(e) In diesem Falle wäre der Ganove, falls für ihn ? = 6 zutrifft, indifferent zwischen einem Einbruch in den Kiosk und in den Dönerladen. Der Wachmann müßte zur Ableitung seiner optimalen Handlung zu einer Einschätzung darüber gelangen, wie sich der Ganove dann verhalten wird, d.h. er muß sich eine Wahrscheinlichkeit p_K bilden, von der er glaubt, daß der Ganove im Falle von ? = 6 in den Kiosk einbricht (entsprechend 1 – p_K für den Dönerladen). Hiervon hängt dann die optimale Handlung des Wachmanns ab. Dies verdeutlicht man sich am besten für den Extremfall p_K = 0 – d.h. bei Indifferenz bricht der Gauner nie in den Kiosk, dafür stets in den Dönerladen ein –; hier kann die Lösung aus (c), sich vor dem Kiosk zu postieren, natürlich nicht mehr optimal sein.

(f) Ursprünglich hätte der Ganove (vgl. (b)) im Falle von ? = 6 einen Einbruch in den Kiosk vorgezogen. Da er aber nun um die Existenz des Wachmanns weiß und damit ebenso wie dieser selbst dessen optimale Handlung ableiten kann (vgl. (c)), wird er nicht mehr in den Kiosk einbrechen, da ja dort mit Sicherheit der Wachmann steht. Er wird es also nun vorziehen, den Dönerladen heimzusuchen.

Aufgabe 14.3

Zwei Entscheider A und B bewerten riskante Alternativen nach Maßgabe einer rangplatzabhängigen Nutzenfunktion.
Während beide identische Nutzenfunktionen über Geldbeträge haben, die durch $u_A(x) = u_B(x) = x$ gegeben sind, unterscheiden sie sich in ihrer Wahrscheinlichkeitstransformationsfunktion, die für A $g_A(p) = p^{0,5}$ und für B $g_B(p) = p$ lautet.
Die Unsicherheit werde durch drei Umweltzustände beschrieben, deren jeweilige Eintrittswahrscheinlichkeiten der nachfolgenden Tabelle zu entnehmen sind. Weiterhin enthält die Tabelle die zustandsabhängigen Vermögensniveaus der beiden Entscheider. So beträgt bspw. das Vermögen von Entscheider B, falls der Zustand s_3 eintritt, 4 GE.

Zustand	s_1	s_2	s_3
prob(s_i)	0,25	0,51	0,24
Entscheider A	0	8	3
Entscheider B	6	2	4

Entscheider B spürt intuitiv, daß die gegebene Allokation bedingter Vermögensansprüche noch Spielraum für Tauschmöglichkeiten bietet. Die beiden Entscheider einigen sich auf folgende Verhandlungsstruktur: B darf einen Tauschvorschlag unterbreiten (z.B. „Ich biete 3 GE in s_3 und erhalte dafür 2 GE in s_2."), den A entweder ablehnen oder annehmen kann (wobei wir voraussetzen wollen, daß er im Falle der Indifferenz zwischen bisheriger und vorgeschlagener Lösung dem Vorschlag zustimmt).

(a) Berechnen Sie die Nutzenwerte der beiden Entscheider in der Ausgangssituation vor Tausch.

(b) Was ist ursächlich dafür, daß in der Ausgangssituation noch beiderseitig vorteilhafte Tauschmöglichkeiten bestehen?

(c) Welches Angebot wird Entscheider B dem Entscheider A unterbreiten, wenn B eine Maximierung seines Nutzens anstrebt? Wie wird sich A verhalten? Berechnen Sie die Nutzenwerte der beiden Entscheider bzgl. der sich nach erfolgtem Tausch ergebenden Allokation.

(d) Erläutern Sie qualitativ, inwiefern die Verteilung der „gains from trade" (im Sinne der Veränderung der Nutzenwerte durch den Tausch) auf die beiden Entscheider durch die Festlegung der Verhandlungsstruktur bedingt ist.

Lösung 14.3

(a) Bei den hier betrachteten rangplatzabhängigen Nutzenfunktionen ist zu berücksichtigen, daß die Konsequenzen zunächst in eine aufsteigende Reihenfolge zu bringen sind, bevor man die Wahrscheinlichkeiten transformiert.
Darauf aufbauend gelangt man zu einem Nutzenwert von Entscheider A in der Ausgangssituation von:
$RDEU_A(\text{Allokation vor Tausch}) = (0{,}25)^{0,5} \cdot 0 + ((0{,}25 + 0{,}24)^{0,5} - (0{,}25)^{0,5}) \cdot 3 + ((0{,}25 + 0{,}24 + 0{,}51)^{0,5} - (0{,}25 + 0{,}24)^{0,5}) \cdot 8 = 3.$
Bei Entscheider B ist die Wahrscheinlichkeitstransformationsfunktion $g_B(p) = p$ gerade die Identitätsfunktion, also gilt:
$RDEU_B(\text{Allokation vor Tausch}) = 0{,}51 \cdot 2 + 0{,}24 \cdot 4 + 0{,}25 \cdot 6 = 3{,}48.$

(b) Wegen der Konkavität seiner Wahrscheinlichkeitstransformationsfunktion verhält sich Entscheider A trotz Linearität der Nutzenfunktion risikoavers. Demgegenüber ist Entscheider B risikoneutral. Da Entscheider A in der Ausgangsallokation Risiko zu tragen hat (seine zustandsabhängigen Vermögensniveaus differieren über die drei Umweltzustände), lassen sich Effizienzgewinne realisieren, indem Entscheider B den Entscheider A in einem nachfolgend zu präzisierenden Sinne „versichert".

(c) Für Entscheider B ist es sinnvoll, Entscheider A zu „versichern", also dafür zu sorgen, daß dessen Vermögensposition über sämtliche drei Umweltzustände hinweg konstant ist. Daneben ist zu beachten, daß Entscheider A keine Tauschofferte akzeptieren wird, welche ihn nutzenmäßig schlechter stellt als seine Ausgangsallokation. Deren Nutzenwert beträgt, wie in (a) berechnet, 3. Entscheider B wird Entscheider A also ein Angebot unterbreiten, das Entscheider A ein Vermögen von 3 in allen Umweltzuständen gewährt.
Das Angebot von Entscheider B lautet mithin: „Du (A) erhältst 3 s_1-claims im Austausch gegen 5 s_2-claims." Da Entscheider A zwischen der Ausgangssituation und der vorgeschlagenen Lösung indifferent ist, stimmt er letzterer annahmegemäß zu.
Nach erfolgtem Tausch stellen sich die zustandsabhängigen Vermögensniveaus wie folgt dar:

Zustand	s_1	s_2	s_3
prob(s_i)	0,25	0,51	0,24
Entscheider A	3	3	3
Entscheider B	3	7	4

Die Nutzenwerte dieser Allokation betragen $RDEU_A$(Allokation nach Tausch) = 3 sowie $RDEU_B$(Allokation nach Tausch) = 5,28.

(d) Es fällt auf, daß sich nur der Nutzenwert des Entscheiders B erhöht hat, während der des Entscheiders A konstant geblieben ist. Hierin spiegelt sich zum einen wider, daß die Ausgangssituation nicht (Pareto-) effizient war, da es möglich ist, ein Wirtschaftssubjekt strikt besserzustellen, ohne daß ein anderes eine Nutzeneinbuße erfährt.
Der Effizienzgewinn wird vollständig von Entscheider B vereinnahmt. Durch das Stellen eines „Take-it-or-leave-it"-Angebots, welches für Entscheider A gerade noch akzeptabel ist, kann er Entscheider A auf sein Reservationsnutzenniveau zurückdrängen und selbst die „gains from trade" vereinnahmen. Hätte die Verhandlungsstruktur vertauschte Rollen vorgesehen (Entscheider A unterbreitet das Angebot, welches Entscheider B annimmt oder ablehnt), wäre der Effizienzgewinn vollständig bei Entscheider A angefallen.