

## Kapitel 13

### Aufgabe 13.1

Wir haben Ihnen fünf verschiedene Abstimmungsregeln vorgestellt. Formulieren Sie weitere drei Abstimmungsregeln! Versuchen Sie dabei, Regeln zu finden, die Ihnen akzeptabel erscheinen. Welche Alternative in dem Beispiel aus Tabelle 13.1 wird bei Anwendung Ihrer Regeln jeweils gewählt?

### Lösung 13.1

#### Erste ausgedachte Abstimmungsregel:

Es wird ermittelt, wie oft Alternativen als schlechteste angegeben werden. Es gewinnt diejenige Alternative, die am seltensten die schlechteste ist. Sollte dies nicht zu einem eindeutigen Ergebnis führen, gewinnt diejenige Alternative, die am seltensten als zweitschlechteste angegeben wird usw.

Lt. Tab. 13.1: Anzahl Nennungen als schlechteste Alternative

	a	b	c	d	e
Anzahl	5	4	0	0	0

Die Alternativen a und b scheiden aus, Unentschieden bei Alternativen c, d und e. Daher wird nun ermittelt, wie häufig die Alternativen c, d und e als zweitschlechteste genannt werden.

Anzahl Nennungen als zweitschlechteste Alternative:

	c	d	e
Anzahl	4	3	0

Somit gewinnt Alternative e, da diese weder als schlechteste noch als zweitschlechteste Alternative genannt wird. Alle anderen Alternativen fallen auf Grund von Nennung als schlechteste oder zweitschlechteste weg.

#### Zweite ausgedachte Abstimmungsregel:

An die Alternativen, die über dem „Durchschnitt“ liegen, wird jeweils ein Pluspunkt vergeben. Die Alternativen, die unter dem „Durchschnitt“ liegen, erhalten nach dem gleichen Muster jeweils einen Minuspunkt.

Die Alternative mit den meisten Punkten (verstanden als Saldo von Plus- und Minuspunkten) gewinnt die Entscheidung.

[Anm.: Der Begriff „Durchschnitt“ ist nicht völlig exakt. Für besonders Korrekte: Es gebe n Alternativen, die jedes Gruppenmitglied in eine Präferenzreihenfolge bringen kann. Ist n gerade, so gelten die  $n/2$  „besseren“ als „über dem Durchschnitt“, die  $n/2$  „schlechteren“ als „unter dem Durchschnitt“. Ist n ungerade, so gelten die  $(n-1)/2$  „besten“ als „über dem Durchschnitt“, die  $(n-1)/2$  „schlechtesten“ als „unter dem Durchschnitt“ und die „mittlere“ als „Durchschnitt“ (diese erhält annahm gemäß weder Plus- noch Minuspunkt).]

Lt. Tab. 13.1 („Durchschnitt“ ist hier die drittbeste Alternative.)

	a	b	c	d	e
Fraktion 1	4	-4	-4		4
Fraktion 2	-3	3	3	-3	
Fraktion 3	-2	-2	2	2	
<b>Summe</b>	<b>-1</b>	<b>-3</b>	<b>1</b>	<b>-1</b>	<b>4</b>

Nach dieser Regel gewinnt also Alternative e die Abstimmung.

#### Dritte ausgedachte Abstimmungsregel:

Es werden (ebenso wie zuvor) Plus- und Minuspunkte nach der Platzierung verteilt. Es erhält jedoch nur die jeweils beste Alternative einen Pluspunkt, die jeweils schlechteste Alternative einen Minuspunkt. Die Alternative mit den meisten Punkten (verstanden als Saldo von Plus- und Minuspunkten) gewinnt die Entscheidung.

Lt. Tab. 13.1

	a	b	c	d	e
Fraktion 1	4	-4			
Fraktion 2	-3	3			
Fraktion 3	-2		2		
<b>Summe</b>	<b>-1</b>	<b>-1</b>	<b>2</b>	<b>0</b>	<b>0</b>

Nach dieser Regel gewinnt also Alternative c die Abstimmung.

**Aufgabe 13.2**

Jede Abstimmungsregel verstößt mindestens gegen ein Arrowsches Axiom. Gegen welche Axiome verstoßen die von Ihnen in Aufgabe 13.1 formulierten Regeln?

**Lösung 13.2**

Alle Regeln verstoßen (nur) gegen das Unabhängigkeitsaxiom. Zum Nachweis wird jeweils auf das Beispiel aus Aufgabe 13.1 (also Tabelle 13.1) zurückgegriffen.

Erste Abstimmungsregel:

Es liegt zunächst eine kollektive Präferenz der Alternative e gegenüber der Alternative c vor (vgl. Aufgabe 13.1). Es wird nun eine neue Alternative f eingeführt. Diese wird von den Fraktionen 2 und 3 gegenüber allen anderen Alternativen präferiert. Für Fraktion 1 stellt Alternative f die neue schlechteste Alternative dar. Die neuen Präferenzordnungen sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt.

Fraktion 1	Fraktion 2	Fraktion 3
a	f	f
e	b	c
d	c	d
c	e	e
b	d	b
f	a	a

Auf Grund der Nennung als schlechteste Alternative scheidet zunächst die Alternativen a und f aus. In der zweiten Stufe scheidet die Alternativen b und d infolge Nennung als zweitschlechteste Alternativen aus. In der dritten Stufe wird Alternative c von 4 Personen, Alternative e von 5 Personen als drittschlechteste Alternative angegeben. Folglich wird Alternative c gewählt. Damit liegt eine kollektive Präferenz der Alternative c gegenüber der Alternative e vor. Das Axiom der Unabhängigkeit ist hier also verletzt.

Zweite Abstimmungsregel

Es liegt zunächst eine kollektive Präferenz der Alternative e gegenüber der Alternative d vor. Nimmt man nun die Alternative a aus der Entscheidungssituation heraus, stimmt dies nicht mehr.

Lt. Tab. 13.1 („Durchschnitt“ ist nun die „zweieinhalbbeste“ Alternative)

	b	c	d	e
Fraktion 1	-4	-4	4	4
Fraktion 2	3	3	-3	-3
Fraktion 3	-2	2	2	-2
<b>Summe</b>	<b>-3</b>	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>-1</b>

Nun liegt eine kollektive Präferenz der Alternative d gegenüber der Alternative e vor. Das Axiom der Unabhängigkeit ist hier also verletzt.

Dritte Abstimmungsregel:

Es liegt zunächst eine kollektive Präferenz der Alternative c gegenüber der Alternative e vor. Nimmt man nun die Alternative a aus der Entscheidungssituation heraus, stimmt dies nicht mehr.

Lt. Tab. 13.1

	b	c	d	e
Fraktion 1	-4			4
Fraktion 2	3		-3	
Fraktion 3	-2	2		
<b>Summe</b>	<b>-3</b>	<b>2</b>	<b>-3</b>	<b>4</b>

Nun liegt eine kollektive Präferenz der Alternative e gegenüber der Alternative c vor. Das Axiom der Unabhängigkeit ist hier also verletzt.

**Aufgabe 13.3**

Angenommen, Fraktion 3 ist im Beispiel von Tabelle 13.1 über die Präferenzen von Fraktion 1 und 2 unterrichtet. Wie kann Fraktion 3 durch strategisches Verhalten die Gruppenentscheidung bei den in 13.2.1 bis 13.2.6 vorgestellten Abstimmungsregeln in ihrem Sinne beeinflussen?

**Lösung 13.3**13.2.1 Regel der einfachen Mehrheit

Fraktion 3 müßte anstatt für Alternative c, ihre beste Alternative, für Alternative b stimmen, die dann gewinnt. Dies entspricht zwar nur der viertbesten Alternative von Fraktion 3, sie ist jedoch immer noch besser als Alternative a, die sonst die Abstimmung nach der Regel der einfachen Mehrheit gewinnen würde. Etwas Besseres als die viertbeste Alternative kann Fraktion 3 hier nicht erreichen.

13.2.2 Regel der absoluten Mehrheit

Hier kann Fraktion 3 durch strategisches Verhalten keinen besseren Ausgang herbeiführen. Aus der Stichwahl käme aufgrund der Präferenzordnung von Fraktion 3 die Alternative b als Sieger hervor. Fraktion 3 könnte zumindest den unnötigen Aufwand einer Stichwahl vermeiden, indem sie bereits im ersten Wahlgang für Alternative b stimmt, die sie Alternative a vorzieht. Das Ergebnis des ersten Wahlganges wäre dann 5:4 zugunsten von b.

13.2.3 Regel der Mehrheit der Paarvergleiche

Fraktion 3 ist hier bereits durch den „nicht-strategischen“ Ausgang des Abstimmungsprozesses bestmöglich gestellt, da deren beste Alternative c die Abstimmung gewinnt.

13.2.4 Regel der sukzessiven Paarvergleiche

Auch hier siegt bereits bei „nicht-strategischem“ Verhalten Alternative c, die von Fraktion 3 bevorzugte Alternative.

13.2.5 Borda-Regel

Bei „nicht-strategischem“ Abstimmungsverhalten wird Alternative e gewählt. Durch strategisches Verhalten der Fraktion 3 ist es jedoch möglich, daß Alternative c gewählt wird. Dies ist (u.a.) dadurch zu erreichen, daß Fraktion 3 in ihrer (vorgetauschten) Präferenzordnung die Alternativen a und e austauscht. Dies führt dazu, daß Alternative e nur noch 18 Punkte erhält (und Alternative a nun 20). Da c bei 21 Punkten liegt, wird jetzt die von Fraktion 3 präferierte Alternative c gewählt.

13.2.6 Approval Voting

Bei „nicht-strategischem“ Abstimmungsverhalten (mit der in 13.2.6 vorgegebenen Anzahl abgegebener Stimmen pro Fraktion) wird Alternative d gewählt. Fraktion 3

könnte das Ergebnis auch hier dahingehend beeinflussen, daß Alternative c gewählt wird. Dies läßt sich dadurch erreichen, daß nur je **eine** Stimme für die beste Alternative c abgegeben wird. Damit erhält Alternative c 5 Punkte und wird gewählt. Wenn Fraktion 3 weiterhin für zwei Alternativen Stimmen vergeben muß, wird die Situation deutlich schwieriger. Hier ist es nämlich nicht mehr möglich, eine eindeutige Wahl von c zu erreichen. Bekanntlich haben aus den Fraktionen 1 und 2 die Alternativen a, d und e bereits 4, Alternative b bereits 3 Stimmen. Es ist für Fraktion 3 nicht möglich, je eine weitere Stimme zu vergeben, ohne daß nicht zumindest eine Alternative außer c zumindest 5 Stimmen bekäme. Denkbar ist, daß Fraktion 3 die zwei Stimmen an Alternative b gibt, so daß ein Patt zwischen den Alternativen b und c eintritt (hier käme es nun darauf an, wie diese Pattsituation aufgelöst wird), bzw. daß sie die zwei Stimmen an Alternative d gibt, die dann mit 6 Punkten eindeutig gewählt, womit Fraktion 3 zumindest ihre zweitbeste Alternative sichern kann. [Anm.: Weiterführend könnte man sich überlegen, daß die Mitglieder von Fraktion 3 ein aus ihrer Sicht noch besseres Ergebnis erreichen können, wenn einer seine zweite Stimmen an Alternative b und der andere an Alternative d vergibt. Unter der Annahme, daß eine Pattsituation zwischen zwei Alternativen durch (fairen) Münzwurf aufgelöst wird, resultiert aus einem derartigen Abstimmungsverhalten mit Wahrscheinlichkeit von jeweils  $\frac{1}{2}$  entweder Alternative c oder d. Dies wäre das unter den gegebenen Annahmen beste realisierbare Resultat.]