# Kapitel 9

## Aufgabe 9.1

(a) Welche Beziehung besteht zwischen Wert - und Nutzenfunktionen?
(b) Beschreiben Sie zwei Verfahren zur Ermittlung von Nutzenfunktionen und stellen Sie ggf. Analogien zur Ermittlung von Wertfunktionen dar.

## Lösung 9.1

(a) Die Wertfunktion bildet die Präferenzen eines Entscheiders hinsichtlich sicherer Konsequenzen ab. Mit Hilfe der Nutzenfunktion kann der Entscheider seine Präferenzen hinsichtlich unsicherer Konsequenzen abbilden. Hierbei handelt es sich, entsprechend der Erwartungsnutzentheorie, um eine gleichzeitige Modellierung von Wert- und Risikoeinstellung hinsichtlich einer unsicheren Konsequenz.

(b) Eine Beschreibung der Verfahren zur Nutzenfunktionsbestimmung finden Sie im Buch ab S. 227 (Mittelwert-Kettungs-Methode; Fraktilmethode; Methode variabler Wahrscheinlichkeiten; Lotterievergleich-Methode). Eine offensichtliche Analogie besteht zwischen Mittelwert-Kettungs-Methode bei der Nutzenfunktionsbestimmung und der Halbierungsmethode zur Bestimmung von Wertfunktionen. Analog zur Halbierungsmethode, werden bei der Mittelwert-Kettungs-Methode die Intervalle nutzenmäßig halbiert.

## Aufgabe 9.2

Annette, Lukas und Martin besitzen jeder ein Los für eine Tombola, bei der sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,2 100 € und mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,8 10 € gewinnen können. Ihre Nutzenfunktionen über den Gewinnen x lauten wie folgt:

| | |
|---|---|
| Annette: | $u(x) = 0{,}002x^2 + x$ |
| Lukas: | $u(x) = \log x$ |
| Martin: | $u(x) = 0{,}4x + 100.$ |

(a) Skizzieren Sie die drei Nutzenfunktionen mit der üblichen Normierung auf [0, 1].
(b) Jemand möchte den Dreien das Los abkaufen und bietet dafür 25 €. Wer würde sich auf den Handel einlassen?
(c) Bestimmen Sie für jede Person die Risikoprämie.

## Lösung 9.2

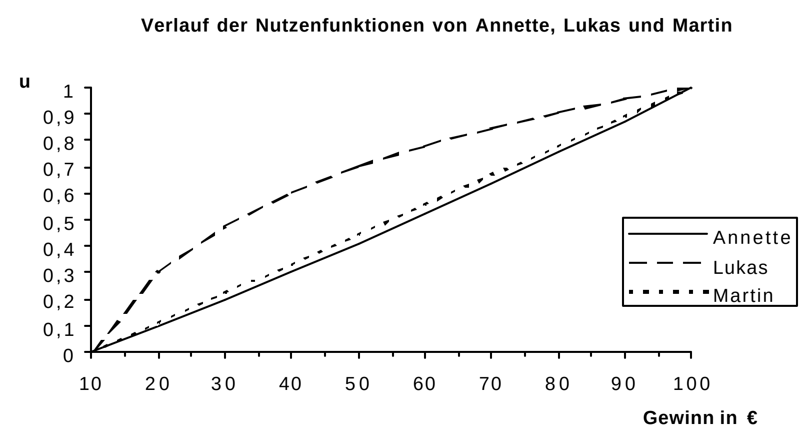
(a) *1. Schritt: Normierung der Nutzenfunktionen*

Martin: $u(x) = 0{,}4x + 100$
$u(10) = 104$
es muß aber gelten: $u(10) = 0!$
$\Rightarrow\ u_n(x) = u(x) - 104$
$u_n(100) = 36$
es muß aber gelten: $u(100) = 1!$
$\Rightarrow\ u_n(x) = (u(x) - 104) / 36$
$\Rightarrow\ u_n(x) = (0{,}4x - 4) / 36$

analog für
Lukas: $u(x) = \log x \qquad \Rightarrow\ u_n(x) = \log x - 1$

Annette: $u(x) = 0{,}002x^2 + x \qquad \Rightarrow\ u(x) = (0{,}002x^2 + x - 10{,}2) / 109{,}8$

*2. Schritt: Skizzieren der Nutzenfunktionen*



(b) Zu wählen ist zwischen dem Erwartungsnutzen der Lotterie und dem Nutzen von 25 €:

| | EU(Lotterie) | u(25) | |
|---|---|---|---|
| Annette | 0,2 | 0,146 | wählt Lotterie |
| Lukas | 0,2 | 0,398 | wählt 25 € |
| Martin | 0,2 | 0,166 | wählt Lotterie |

(c) gesucht: Risikoprämie (RP) der Entscheider
RP(a) = EW(a) – SÄ(a)

bekannt: RP > 0 ⇒ risikoscheu
RP = 0 ⇒ risikoneutral
RP < 0 ⇒ risikofreudig (bei monoton steigender Nutzenfunktion)

Berechne die Sicherheitsäquivalente (SÄ) der Entscheider mittels
EU(Lotterie) = u(SÄ)

also: EU(Lotterie) = 0,2; EW(Lotterie) = 28

Annette:

$$\frac{(0{,}002x^2 + x - 10{,}2)}{109{,}8} = 0{,}2$$

Lösen einer quadratischen Gleichung der Form $ax^2 + bx + c$:

$$\frac{-1 + \sqrt{1^2 - 4 \cdot 0{,}002 \cdot (-32{,}16)}}{2 \cdot 0{,}002} = x \quad \Rightarrow \; x = 30{,}32 \; \text{[SÄ von Annette]}$$

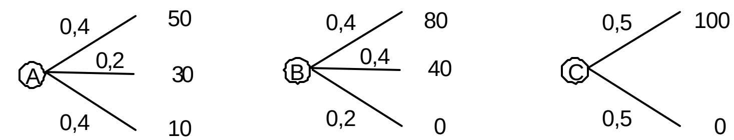
Lukas: $\log x - 1 = 0{,}2 \;\Rightarrow\; x = 10^{1,2}$ » 15,85 [SÄ von Lukas]

Martin: $(0{,}4x - 4) / 36 = 0{,}2 \;\Rightarrow\; x = 28$ [SÄ von Martin]

| | | |
|---|---|---|
| Annette | RP = 28 – 30,32 = –2,32 | risikofreudig |
| Lukas | RP = 28 – 15,85 = 12,15 | risikoscheu |
| Martin | RP = 28 – 28 = 0 | risikoneutral |

**Aufgabe 9.3**

Lothar Lotter muß die folgenden Lotterien gemäß seiner Präferenz in eine Rangfolge bringen:




Er bittet Entscheidungstheoretiker Bernd Nulli um Rat. Dieser schlägt ihm vor, die Lotterien nach dem Nutzenerwartungsert zu ordnen. Lothar ermittelt also seine Nutzenfunktion, sie lautet $u(x) = x/50 - x^2/10.000$. Um sicher zu gehen, die richtige Entscheidung zu treffen, fragt Lotter auch den Wertpapieranalysten Müller-Sigmann, einen Verfechter des μ-σ-Prinzips. Dieser rät ihm, in Abhängigkeit vom Erwartungswert und der Varianz jeder Lotterie zu entscheiden. Müller-Sigmann ist Lotter auch bei der Bestimmung einer μ-σ-Präferenzfunktion behilflich. Es ergibt sich $f(\mu, \sigma) = \mu/50 - (\mu^2 + \sigma^2)/10.000$. Welche Präferenzordnungen ergeben sich für Lotter nach den beiden Ansätzen? Nehmen Sie zu dem Ergebnis Stellung!

**Lösung 9.3**

*Rangfolge nach dem Erwartungsnutzenprinzip:*

Erwartungsnutzen der Lotterien nach der Nutzenfunktion $u(x) = x/50 - x^2/10.000$

EU(A) $= 0{,}4 \cdot u(50) + 0{,}2 \cdot u(30) + 0{,}4 \cdot u(10)$
$= 0{,}4 \cdot 0{,}75 + 0{,}2 \cdot 0{,}51 + 0{,}4 \cdot 0{,}19 = 0{,}478$
EU(B) $= 0{,}4 \cdot 0{,}96 + 0{,}4 \cdot 0{,}64 + 0{,}2 \cdot 0 = 0{,}64$
EU(C) $= 0{,}5$ ⇒ Rangfolge: B > C > A

*Rangfolge nach dem m- s-Prinzip:*

Lotterie A: $\mu = 30$; $\sigma = 17{,}89$
$f_A(\mu, \sigma) = 30/50 - (30^2 + 17{,}89^2)/10.000 = 0{,}478$
Lotterie B: $\mu = 48$; $\sigma = 29{,}93$
$f_B(\mu, \sigma) = 48/50 - (48^2 + 29{,}93^2)/10.000 = 0{,}64$
Lotterie C: $\mu = 50$; $\sigma = 50$
$f_C(\mu, \sigma) = 50/50 - (50^2 + 50^2)/10.000 = 0{,}5$

⇒ Rangfolge: B > C > A

Die Präferenzordnungen aus der Anwendung der Erwartungsnutzentheorie und der Erwartungswert-Varianz-Regel sind gleich. Dies gilt jedoch nur unter der Annahme normalverteilter Konsequenzen. Deshalb sollte die $\mu$–$\sigma$–Regel nur mit Vorsicht angewendet werden.

**Aufgabe 9.4**

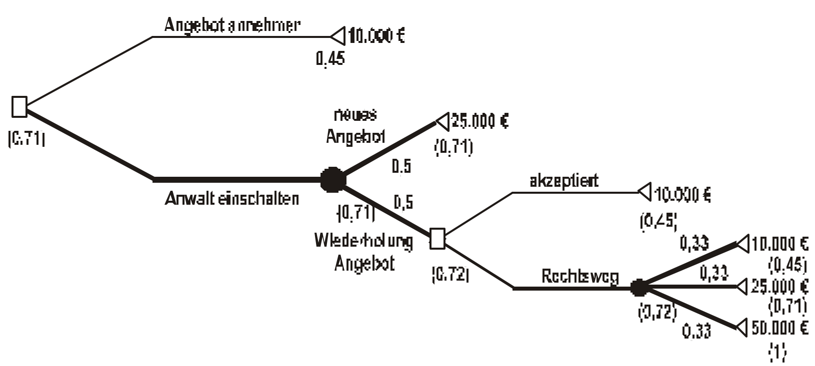
Klaus beschädigt unabsichtlich eine kostbare, in ihrem Wert aber nur schwer schätzbare Vase von Ute. Um den Schaden zu regulieren, macht Klaus' Haftpflichtversicherung Ute ein Angebot über 10.000 €. Ute überlegt, es anzunehmen oder einen Rechtsanwalt einzuschalten, um 50.000 € zu fordern. Ute vermutet, daß die Versicherung darauf mit einem Angebot von 25.000 € reagieren wird oder ihr Angebot von 10.000 € noch einmal wiederholt. Diese beiden Möglichkeiten hält sie für gleich wahrscheinlich. Werden Ute 25.000 € angeboten, so würde sie akzeptieren. Bei Wiederholung des Angebots von 10.000 € kann sie akzeptieren oder den Rechtsweg beschreiten, dessen Ausgang allerdings ungewiß ist. Sie hält 10.000 €, 25.000 € und 50.000 € für gleich wahrscheinlich.

(a) Stellen Sie das Entscheidungsproblem mittels eines Entscheidungsbaums dar.
(b) Skizzieren Sie die drei Strategien, zwischen denen Ute wählen kann.
(c) Welche Strategie wird Ute wählen, wenn für sie die folgende Nutzenfunktion gilt (x = Höhe der Entschädigung):

$$u(x) = \sqrt{\frac{x}{50.000}}$$

**Lösung 9.4**

(a) Darstellung des Problems als Entscheidungsbaum:




(b) Strategien:
$S_1$: Angebot von € 10.000 annehmen
$S_2$: Anwalt einschalten, falls Angebot wiederholt wird, akzeptieren
$S_3$: Anwalt einschalten, falls Angebot wiederholt wird, Rechtsweg einschalten

(c) Ute wird Strategie $S_3$ wählen, da diese den höchsten Nutzenerwartungswert aufweist (siehe Nutzenerwartungswerte in Klammern in Abb. a).

**Aufgabe 9.5**

Ein Entscheider hat eine konstante relative Risikoeinstellung. Sein Sicherheitsäquivalent für die Lotterie (100 €, 0,5; 20 €, 0,5) beträgt 50 €. Geben Sie eine hiermit verträgliche Nutzenfunktion über dem Intervall [20 €, 100 €] an und normieren Sie sie auf Werte zwischen null und eins.

**Lösung 9.5**

Man ermittelt die gesuchte Nutzenfunktion mit Hilfe der Annahme über eine konstante relative Risikoscheu des Entscheiders. Die Nutzenfunktion hat folgende Gestalt:

$$u(x) = \alpha + \beta\, x^{1-c}$$

- $\alpha$ und $\beta$ sind die Skalierungsfaktoren auf dem Intervall [0, 1]
- c legt die Krümmung der Nutzenfunktion fest

Es muß gelten:

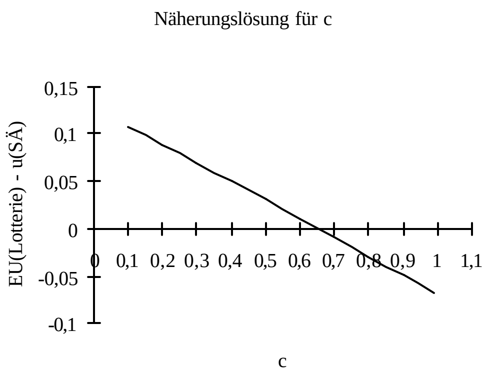
$$\text{EU(Lotterie)} = u(\text{SÄ})$$
$$0{,}5 \cdot (\alpha + \beta \cdot 10^{1-c}) + 0{,}5 \cdot (\alpha + \beta \cdot 2^{1-c}) = \alpha + \beta \cdot 5^{1-c}$$

Nun muß c mit Hilfe eines Näherungsverfahrens bestimmt werden. Bei gleichzeitiger Normierung von $\alpha$ und $\beta$ in Abhängigkeit von c ermittelt sich c durch die Gleichung:

$$(0{,}5 \cdot (\alpha + \beta \cdot 10^{1-c}) + 0{,}5 \cdot (\alpha + \beta \cdot 2^{1-c})) - (\alpha + \beta \cdot 5^{1-c}) = 0$$

$$\alpha = -(2^{1-c} \cdot \beta) \cdot \beta = 1 / (-(2^{1-c}) + 10^{1-c})$$

| *c* | *a* | *b* | *EU(Lotterie) – u(SÄ)* |
|---|---|---|---|
| 0,1 | –0,30705933 | 0,16454902 | 0,106623578 |
| 0,2 | –0,381112329 | 0,218891553 | 0,087871599 |
| 0,3 | –0,479577363 | 0,295214495 | 0,068790661 |
| 0,4 | –0,614806582 | 0,405621074 | 0,049431552 |
| 0,5 | –0,809016994 | 0,572061403 | 0,02984881 |
| 0,6 | –1,106618316 | 0,838659857 | 0,010100176 |
| 0,7 | –1,611196925 | 1,308698563 | –0,009754035 |
| 0,8 | –2,633452431 | 2,292553497 | –0,02965163 |
| 0,9 | –5,726755542 | 5,343251855 | –0,049529305 |
| 0,99 | –61,63483465 | 61,20909175 | –0,067349594 |

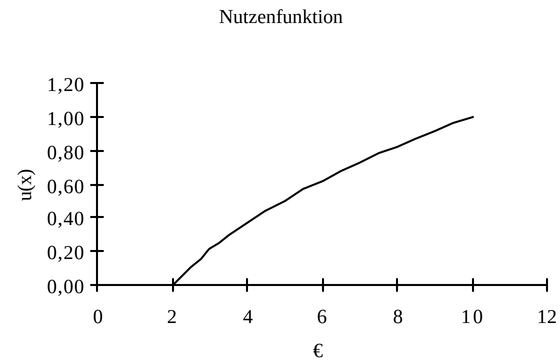



$\Rightarrow$ c = 0,6355

Nun lassen sich $\alpha$ und $\beta$ bestimmen:

$$\beta = 1 / (-(2^{1-0,65}) + 10^{1-0,65})) = 0,964160511$$
$$\alpha = -(2^{1-0,65} \cdot \beta) = -1,228881026$$

Die Nutzenfunktion lautet also: $u(x) = -1,2289 + 0,9642\ x^{0,3645}$




**Aufgabe 9.6**

Bei der anstehenden Sanierung der Lien AG ist die Anzahl der verlorengehenden Arbeitsplätze noch nicht abzusehen; man schätzt, daß sie zwischen null und 2.000 liegen könne. Der Betriebsrat ist indifferent zwischen einer 50-50-Lotterie, bei der entweder keine oder 2.000 Arbeitsplätze verloren gehen, und einer sicheren Anzahl von 500 Arbeitsplatzverlusten. Ebenso gilt (0, 0,5; 500, 0,5) ~ 200 und (500, 0,5; 2000, 0,5) ~ 900.

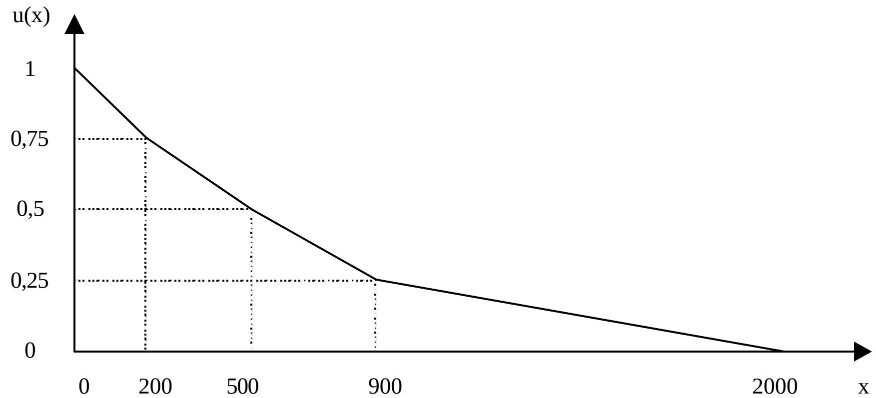
(a) Fertigen Sie eine Skizze an und vervollständigen Sie die Nutzenfunktion durch eine Freihandkurve.

(b) Drückt sich in dem Verlauf der Nutzenfunktion Risikoscheu oder Risikofreude aus?

(c) Es ist zwischen drei Maßnahmen zu wählen. Bei Maßnahme a werden 300, 600 und 1.000 Arbeitsplatzverluste mit je 1/3 Wahrscheinlichkeit erwartet. Bei Maßnahme b gehen sicher 500 Arbeitsplätze verloren. Bei Maßnahme c haben null Arbeitsplatzverluste die Wahrscheinlichkeit 1/4, 300 die Wahrscheinlichkeit 1/2 und 2.000 die Wahrscheinlichkeit 1/4. – Welche Maßnahme müßte der Betriebsrat präferieren, um konsistent mit seiner Nutzenfunktion zu sein?

**Lösung 9.6**

(a) Skizze:




(b) Aus dem konvexen Funktionsverlauf läßt sich Risikofreude im Arrow-Prattschen-Sinne ableiten.

(c) Zunächst wird durch lineare Interpolation der Nutzen für die Konsequenzen 300, 600 und 1000 ermittelt:

z.B.: $u(300) = ?$

$0{,}75 = a + b \cdot 200$

$\Rightarrow \quad a = 0{,}75 - 200b$

$0{,}5 = a + b \cdot 500$

$\Rightarrow \quad 0{,}5 = 0{,}75 - 200b + 500b$

$\Rightarrow \quad b = -0{,}00083$

$a = 0{,}75 - 200 \cdot (-0{,}00083) = 0{,}9166$

$\Rightarrow \quad y = 0{,}9166 - 0{,}00083 \cdot x$

$\Rightarrow \quad 0{,}9166 - 0{,}00083 \cdot 300 = 0{,}6676 = u(300)$

entsprechend:
$u(600) = 0{,}4375$
$u(1000) = 0{,}2273$

Berechnung des Erwartungsnutzens der drei Alternativen:

$$EU(a) = 1/3 \cdot u(300) + 1/3 \cdot u(600) + 1/3 \cdot u(1000)$$
$$= 1/3 \cdot 0{,}6676 + 1/3 \cdot 0{,}4375 + 1/3 \cdot 0{,}2273 = 0{,}4441$$

$$EU(b) = u(500) = 0{,}5$$
$$EU(c) = 1/4 \cdot u(0) + 1/2 \cdot u(300) + 1/4 \cdot u(2000)$$
$$= 1/4 \cdot 1 + 1/2 \cdot 0{,}6676 + 1/4 \cdot 0 = 0{,}5838$$

Der Betriebsrat sollte Maßnahme c befürworten, um konsistent mit seiner Nutzenfunktion zu sein.

**Aufgabe 9.7**

Slovic und Tversky (1974) präsentieren Entscheidern in einer empirischen Untersuchung sowohl Argumente für als auch gegen die Gültigkeit des Unabhängigkeitsaxioms. Fallen Ihnen solche Argumente ein?

**Lösung 9.7**

Das Unabhängigkeitsaxiom besagt, daß, wenn zwei Alternativen für bestimmte Ereignisse identische Konsequenzen besitzen, diese Ereignisse keinen Einfluß auf die Präferenzen des Entscheiders bezüglich dieser Alternativen haben. Betrachten Sie nun folgendes Beispiel:

Stellen Sie sich eine Urne mit 90 Bällen vor. 30 der Bälle sind rot, die verbleibenden Bälle sind entweder gelb oder schwarz. Das Verhältnis von schwarzen und gelben Bällen ist aber festgelegt. Es soll nun ein Ball aus der Urne gezogen werden. Folgende Wetten sind möglich.

| Situation X: | 30 Bälle | 60 Bälle | |
|---|---|---|---|
| | rot | schwarz | gelb |
| A1: Wette auf rot | 100 € | 0 € | 0 € |
| A2: Wette auf schwarz | 0 € | 100 € | 0 € |

| Situation Y: | 30 Bälle | 60 Bälle | |
|---|---|---|---|
| | rot | schwarz | gelb |
| A3: Wette auf rot oder gelb | 100 € | 0 € | 100 € |
| A4: Wette auf schwarz oder gelb | 0 € | 100 € | 100 € |

Wenn man in Situation X auf rot wettet (A1), gewinnt man 100 €, wenn ein roter Ball gezogen wird und nichts, wenn ein schwarzer oder gelber Ball gezogen wird. In Situation Y gewinnt man 100 €, wenn man auf rot oder gelb gewettet hat und entweder ein roter oder ein gelber Ball gezogen wird. Ein Entscheider, der dem Unabhängigkeitsaxiom folgt, müßte nun entweder immer A1 in Situation X und A3 in Situation Y, oder A2 in Situation X und A4 in Situation Y wählen, je nachdem, welches Ereignis er für wahrscheinlicher hält. Denn das Ereignis „gelber Ball ziehen" hat jeweils für beide Alternativen in den zwei Situationen dieselbe Konsequenz und Eintrittswahrscheinlichkeit.

Die *Gegner des Unabhängigkeitsaxioms* argumentieren nun:

> Wähle A1 und A4. Bei A1 ist die Wahrscheinlichkeit, daß man 100 € gewinnt, abschätzbar (genau 1/3), während man die Wahrscheinlichkeit für A2 nicht kennt; sie kann größer oder kleiner sein. Ähnlich verhält es sich in Situation Y. Hier weiß man genau, mit welcher Wahrscheinlichkeit man gewinnen wird; die Gewinnwahrscheinlichkeit bei A4 ist bekannt und größer (genau 2/3). Dies eine sehr risikoaverse Argumentation, d.h. jemand, der risikofreudiger ist, kann genauso gut A2 und A3 wählen.

Die *Befürworter des Unabhängigkeitsaxioms* argumentieren:

> Wenn ein gelber Ball gezogen wird, macht es jeweils in keiner der Situationen einen Unterschied, welche Alternative gewählt wird. Konzentriert man sein Augenmerk nur auf rote und schwarze Bälle, zeigt sich, daß Situation X und Situation Y identisch sind. Wenn man glaubt, daß rot wahrscheinlicher ist als schwarz, wählt man A1 und A3 bzw. umgekehrt.

Was meinen Sie?

**Aufgabe 9.8**

Achten Sie in der nächsten Woche einmal darauf, in welchen Kontexten Ihnen das Wort „Risiko" begegnet. Wie lassen sich diese Aussagen in die Diskussion von Abschnitt 9.3 einordnen?

**Lösung 9.8**

Risiko wird alltäglich häufig im Sinne von Wagnis, Gefahr, betriebswirtschaftlich häufig als Verlustgefahr bzw. Gewinnchance verstanden. Viele betriebswirtschaftlichen Aktivitäten sind infolge unvollständiger Informationen über die zukünftige Entwicklung mit einem Risiko verbunden. Oft werden unsichere Konsequenzen in eine Erwartungswert- und eine Risikokomponente zerlegt (siehe $\mu$-$\sigma$-Prinzip). Dann wird Risiko als Maß der Unsicherheit verstanden, und z.B. mittels der Varianz bestimmt. Zu fragen bleibt allerdings, wie ein rationaler Entscheider beide Größen abwägen soll, um zu einer Entscheidung zu kommen. Versuchen auch Sie sich einmal zu fragen, ob Sie die Risikokomponente einer Entscheidungssituation unabhängig von ihrem Wert beurteilen können. Sind für Sie z.B. zwei 50-50-Lotterien mit den Konsequenzen –10/10 € und –1 Mio. €/1 Mio. € gleich risikoreich?

**Aufgabe 9.9**

Ein Entscheider besitzt die Nutzenfunktion $u(x) = \sqrt{x+a}$ und die Wertfunktion $v(x) = \ln\sqrt{x+a}$ mit $x > 0$, $a > 0$.

(a) Welche absolute Risikoeinstellung hat der Entscheider, und wie verhält sich diese mit steigendem Vermögen x?

(b) Welche Risikoeinstellung besitzt der Entscheider relativ zu seinem Vermögen x, und wie verhält sich diese, wenn sein Vermögen steigt?

(c) Welche Risikoeinstellung hat der Entscheider relativ zu seiner Wertfunktion?

(d) Erläutern Sie die unterschiedlichen Ergebnisse.

**Lösung 9.9**

(a) Berechnung des Arrow-Prattschen-Risikoeinstellungsmaßes:

$$r(x) = -\frac{u(x)}{u'(x)} \qquad \text{also:}$$

$$u'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+a}}$$

$$u''(x) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x+a)\cdot\sqrt{x+a}}$$

$$\Rightarrow r(x) = -\frac{-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x+a)\cdot\sqrt{x+a}}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+a}}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+a}$$

In der Nutzenfunktion des Entscheiders zeigt sich absolute Risikoaversion, die abhängig von der Höhe des Vermögens ist. Für alle $x > -a$ ist r(x) fallend in x und größer als 0. Mit zunehmenden Vermögen nimmt also die absolute Risikoaversion ab.

(b) Das relative Risikomaß lautet:

$$x\cdot r(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x+a}$$

Für $a > 0$ wächst dieser Term in x und ist für alle $x > 0$ positiv (weil $a > 0$). Damit strebt die Risikoaversion mit steigendem Vermögen gegen den Grenzwert 1/2.

(c) Ob eine Funktion u konkaver ist als ein Funktion v, hängt davon ab, ob die Funktion $u \cdot v^{-1}$ konkav ist. Im gegebenen Fall ergibt sich für $u(x) = \sqrt{x+a}$ und $v(x) = \ln\sqrt{x+a}$ die konvexe Funktion $u \cdot v^{-1}(y) = e^{y}$. Relativ zur Wertfunktion ist die Nutzenfunktion also weniger konkav.

Anmerkung: Dies ist die formal korrekte Lösung. Es wird jedoch nicht erwartet, daß jeder Student diese Aufgabe so lösen kann. Ausreichend ist auch die Argumentation der Form: "v(x) ist konkaver als u(x), da die konkave Logarithmusfunktion die Konkavität der Wurzelfunktion noch verstärkt".

(d) Die scheinbare Risikoaversion aus (b) hat nicht wirklich etwas mit Risikoaversion zu tun, sondern ergibt sich aus der Krümmung der Wertfunktion. Der Entscheider steht dem Risiko in Wirklichkeit positiv gegenüber.

**Aufgabe 9.10**

Ein Entscheider hat eine konstante relative Risikoaversion von 0,5. Ermitteln Sie eine passende Nutzenfunktion und normieren Sie diese für $x \in [0, 100]$ auf Werte zwischen 0 und 1.

**Lösung 9.10**

Die Funktion hat die Form:

für $x \cdot r(x) = c < 1$ und $\neq 0$
$\Rightarrow u(x) = \alpha + \beta \cdot x^{1-c}$ mit $\beta > 0$

also: $u(x) = \alpha + \beta \cdot x^{0,5}$

Nun muß lediglich die Normierung durchgeführt werden:

$u(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta \cdot 0^{0,5} = 0$
$\quad \Rightarrow \quad \alpha = 0$

$u(100) = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta \cdot 100^{0,5} = 1$
$\quad \Rightarrow \quad 10 \cdot \beta = 1$
$\quad \Rightarrow \quad \beta = 1/10$

Damit lautet die normierte Nutzenfunktion: $u(x) = 1/10\ x^{0,5}$

**Aufgabe 9.11**

Welche Methoden zur Ermittlung der Nutzenfunktion wurden bei den nachfolgenden Befragungen angewandt? Welche Vor- und Nachteile ergeben sich bei den verschiedenen Verfahren? Zeichnen Sie die Nutzenfunktion des jeweiligen Entscheiders und charakterisieren Sie seine Risikoeinstellung.

(a) Die Befragung von Alfred über seine Sicherheitsäquivalente von verschiedenen Lotterien mit je zwei gleichwahrscheinlichen Ergebnissen ($p = 0,5$) ergab:

| | 1. Lotterie | 2. Lotterie | 3. Lotterie | 4. Lotterie |
|---|---|---|---|---|
| $x_{max}$ | 2.000 | 800 | 350 | 2.000 |
| $x_{min}$ | 0 | 0 | 0 | 800 |
| Sicherheitsäquivalent | 800 | 350 | 100 | 1.200 |

Als Nutzwerte sind gegeben: $u(2.000) = 1$; $u(0) = 0$.

(b) Entscheider Boris wird aufgrund von vorgegebenen Basisreferenzlotterien und Sicherheitsäquivalenten nach Wahrscheinlichkeiten gefragt, bei denen er indifferent ist.
$x_{max} = 2.000$ $\quad u(2.000) = 1$
$x_{min} = 0$ $\quad u(0) = 0.$

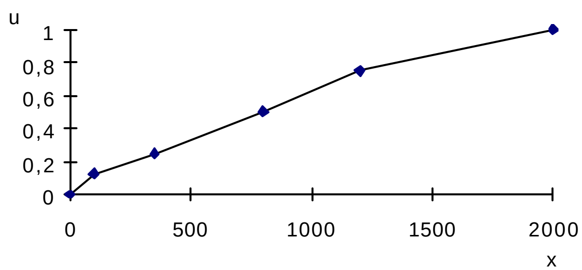
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Sicherheitsäquivalent | 400 | 800 | 1.200 | 1.600 |
| $p^*(x_{max})$ | 0,15 | 0,3 | 0,5 | 0,7 |

(c) Entscheiderin Carola hat die Wahrscheinlichkeiten $p_\alpha$ bestimmt, bei denen sie indifferent ist zwischen der Lotterie ($x_{max}$, $p_\alpha$; $x_{min}$, $1-p_\alpha$) und den Lotterien ($x_\alpha$, 0,5; $x_{min}$, 0,5).
$x_{max} = 2.000$ $\quad x_{min} = 0.$

| | 1. Lotterie | 2. Lotterie | 3. Lotterie | 4. Lotterie |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | 0,8 | 0,6 | 0,4 | 0,2 |
| $x_\alpha = x_{min} + \alpha(x_{max}-x_{min})$ | 1.600 | 1.200 | 800 | 400 |
| $p_\alpha$ | 0,45 | 0,35 | 0,25 | 0,15 |

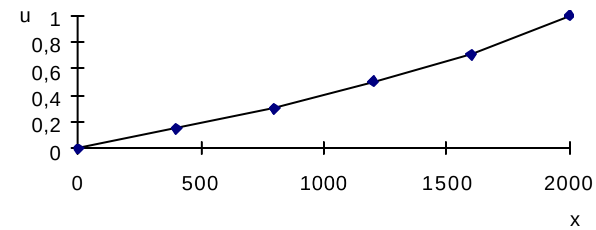
**Lösung 9.11**

(a) Verwendet wurde die Mittelwert-Kettungs-Methode. Vorteil dieses Verfahrens ist die durchgängige Verwendung von 50-50-Wahrscheinlichkeiten, die es auch Entscheidern mit weniger Erfahrung im Umgang mit Wahrscheinlichkeiten erlaubt, ihre Nutzenfunktion zu bestimmen. Ebenso ist ein Konsistenztest einfach durchzuführen. Nachteilig wirkt es sich aus, daß die Ergebnisse vorheriger Befragungen in den weiteren Verlauf der Nutzenfunktionsbestimmung eingehen. Dies kann zu systematischen Verzerrungen führen, wenn der Entscheider z.B. bei der Angabe des $x_{0,5}$-Wertes einen Fehler gemacht hat.



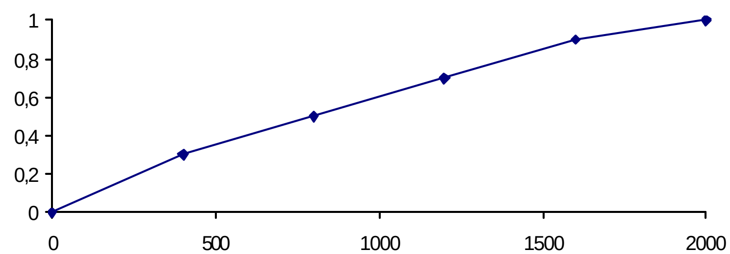

Entsprechend zeigt sich im konkaven Verlauf der Kurve Risikoaversion.

(b) Verwendet wurde die Methode der variablen Wahrscheinlichkeiten. Vorteil dieses Verfahrens ist, daß die Ergebnisse der einzelnen Befragungsschritte nicht aufeinander aufbauen, sowie die Tatsache, daß dieses Verfahren auch bei diskreten Variablen verwendet werden kann. Ein Nachteil dieses Verfahrens liegt darin, daß der Entscheider im Umgang mit Wahrscheinlichkeiten vertraut sein sollte.




Entsprechend zeigt sich im konvexen Verlauf der Kurve Risikofreude.

(c) Verwendet wurde die Lotterievergleich-Methode. Ein Nachteil dieses Verfahrens ist, ähnlich wie bei der Methode variabler Wahrscheinlichkeiten, die umfangreichen Kenntnisse bzgl. der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die beim Entscheider vorhanden sein sollten. Der Hauptvorteil ist darin zu sehen, daß durch den Vergleich zwischen zwei Lotterien der „Sicherheitseffekt“ nicht auftreten kann. Unter dem „Sicherheitseffekt“ ist eine systematische Verzerrung beim Vergleich zwischen mehreren unsicheren und einer sicheren Alternative zu verstehen.




Entsprechend zeigt sich im konkaven Verlauf der Kurve Risikoaversion.

**Aufgabe 9.12**

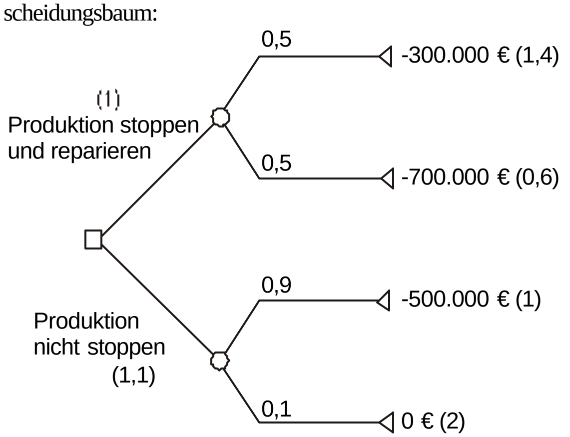
Die Ausschußproduktion in einer Werkzeugmacherei hat sich im vergangenen Monat schlagartig erhöht. Mittlerweile beträgt der Anteil der fehlerhaften Teile 20%, was zusätzliche Kosten im Höhe von 500.000 € verursachte. Der extrem hohe Ausschuß deutet mit 90%iger Wahrscheinlichkeit auf einen Fehler in der Produktionstechnik hin, dessen Korrektur das Anhalten der Produktion erfordert. Bei Nichtkorrektur des Fehlers ist anzunehmen, daß sich die zusätzlichen Kosten der letzten Periode wiederholen werden. Mit 10% Wahrscheinlichkeit ist die Ausschußproduktion nur zufällig so hoch gewesen und wird in der nächsten Periode wieder im Normalbereich sein. Das Anhalten der Produktion zur Untersuchung der Tatbestände kostet mit Sicherheit 300.000 €. Daneben kann ein Produktionsstop mit 50% Wahrscheinlichkeit zur nicht fristgerechten Erfüllung eines Großauftrages führen, was Opportunitätskosten von 400.000 € bedeuten würde.

(a) Zeichnen Sie einen Entscheidungsbaum für die vorliegende Situation!

(b) Welche Entscheidung sollte Dipl.-Kff. Bärbel Bange mit der Nutzenfunktion $u(x) = 2 - 2x/10^6 - (x - 10^6)/10^{12}$ treffen, wenn sie nur die Kosten für den kommenden Monat berücksichtigt?

**Lösung 9.12**

(a) Betrachtet werden soll nur eine Periode. Daraus ergibt sich folgender Entscheidungsbaum:




(b) Bärbel Bange sollte die Produktion nicht stoppen, wenn sie sich entsprechend des Nutzenerwartungskalküls verhalten will. Die Nutzenerwartungswerte können im obigen Entscheidungsbaum (Werte in Klammern) abgelesen werden.

**Aufgabe 9.13**

Ein Investor besitzt konstante absolute Risikoaversion. Wie Sie auf S. 240 gesehen haben, läßt sich sein Nutzen im Falle unsicheren Endvermögens, welches normalverteilt ist mit Erwartungswert $\mu$ und Varianz $\sigma^2$, auch als $\mu - 1/2c\sigma^2$ darstellen.

Der Investor kann zwischen zwei Anlagealternativen wählen:

– risikolose Staatsanleihe, Rendite: 5%, risikolos ($\sigma^2 = 0$);

– riskantes Wertpapier mit normalverteilter Rendite, erwartete Rendite: 20%, risikobehaftet ($\sigma^2 = 0{,}25$).

Der Risikoaversionsparameter des Investors beträgt $c = 0{,}1$; sein Anfangsvermögen $V_0$ beläuft sich auf 100.

(a) Gehen Sie zunächst davon aus, daß der Investor sein Vermögen vollständig in eine der beiden Anlagealternativen investieren will. Welche der beiden wird er wählen?

(b) Berechnen Sie den Wert des Risikoaversionsparameters c, bei dem der Investor bei sonst unveränderten Parameterwerten zwischen den beiden Anlagealternativen indifferent ist.

(c) Nach der Lektüre des Bestsellers „Glücklicher leben durch Diversifikation“ erkennt der Investor, daß er sich durch Aufteilung seines Vermögens auf beide Anlagealternativen im Vergleich zur Lösung aus (a) besserstellen kann. Berechnen Sie, welche Aufteilung für den Investor optimal ist.

(d) Welche Eigenschaft der Normalverteilung ist aus theoretischer Sicht für die Beschreibung möglicher Renditen aus einem Aktieninvestment als besonders kritisch zu werten?

**Lösung 9.13**

(a) Es gilt:
$$\tilde{V}_1 = (1 + \tilde{r})V_0$$
$$E[\tilde{V}_1] = (1 + E[\tilde{r}])V_0$$
$$\operatorname{var}[\tilde{V}_1] = V_0^2 \operatorname{var}[\tilde{r}]$$

Anlagealternative 1 führt zu
$$E[\tilde{V}_1] = (1 + 0{,}05)100 = 105$$
$$\operatorname{var}[\tilde{V}_1] = 0$$

Anlagealternative 2 führt zu
$$E[\tilde{V}_1] = (1 + 0{,}2)100 = 120$$
$$\operatorname{var}[\tilde{V}_1] = 0{,}25 \cdot 100^2 = 2500$$

Der Nutzen aus Anlagealternative 1 beträgt $105 - \frac{1}{2} \cdot 0{,}1 \cdot 0 = 105$

Der Nutzen aus Anlagealternative 2 beträgt $120 - \frac{1}{2} \cdot 0{,}1 \cdot 2500 = -5$

Er wird die risikolose Staatsanleihe wählen.

(b) Berechnen Sie den Wert des Risikoaversionsparameters c, bei dem der Investor bei sonst unveränderten Parameterwerten zwischen den beiden Anlagealternativen indifferent ist.

Indifferenz herrscht, wenn $105 = 120 - \frac{1}{2} c \cdot 2500 \quad \Rightarrow \quad c = 0{,}012$

(c) x bezeichne den in das riskante Wertpapier investierten Geldbetrag (in €), $\tilde{r}$ die (unsichere) Rendite desselben.

Dann gilt:

$$\tilde{V}_1 = (1 + \tilde{r})x + 1{,}05(100 - x) = 105 + (\tilde{r} - 0{,}05)x$$
$$E[\tilde{V}_1] = 105 + [E[\tilde{r}] - 0{,}05]x = 105 + 0{,}15x$$
$$\mathrm{var}[\tilde{V}_1] = x^2 \ \mathrm{var}[\tilde{r}] = 0{,}25x^2$$

Der Nutzen des Investors in Abhängigkeit von x beträgt dann

$$105 + 0{,}15x - \frac{1}{2} c \cdot 0{,}25x^2$$

Differentiation nach x liefert die FOC: $0{,}15 - 0{,}25cx = 0$

$$x^* = \frac{3}{5c}$$

also für $c = 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad x^* = 6$

Die Aufteilung „6 € in das riskante Wertpapier, 94 € in das risikolose Wertpapier“ ist optimal.

(d) Ein Aktieninvestment ist auf Grund der beschränkten Haftung des Anteilseigners dadurch charakterisiert, daß der Investor maximal sein eingesetztes Kapital verlieren kann (i.e. daß die schlechtestmögliche Rendite –100% beträgt). Die Normalverteilung vermag eine derartige Beschränkung des Verlustpotentials nicht abzubilden.