Kapitel 6

Aufgabe 6.1

Für eine mehrwöchige Segeltour sucht Harry noch einige Mitsegler und geht im Geist seinen Bekanntenkreis durch. Es handelt sich um ein wichtiges Problem, weil er weiß, daß die falschen Leute auf einer Segeltour ungeheuer Nerven kosten können. Deshalb stellt er sich wichtige Attribute zusammen, anhand deren er die Kandidaten auswählen möchte, und kommt zu folgender Liste:

- Zuverlässigkeit
- Gesundheit
- Gutgelauntheit
- Sportlichkeit
- Segelerfahrung
- Kontaktfreude
- Technisches Geschick
- Nicht egoistisch.

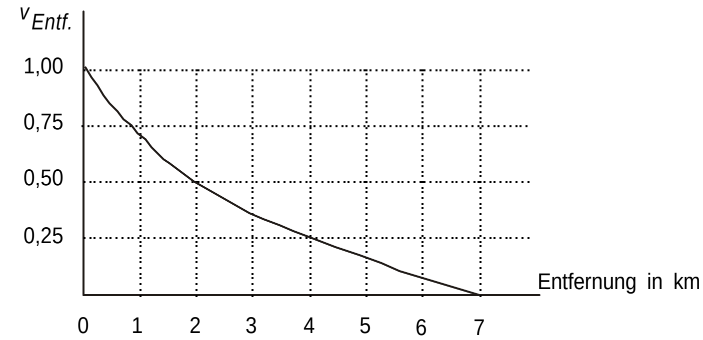
Prüfen Sie, ob für Sie zwischen diesen Attributen wechselseitige Präferenzunabhängigkeit und, falls ja, auch Differenzabhängigkeit herrscht.

Lösung 6.1

Da Präferenz- und Differenzunabhängigkeit nur bzgl. der subjektiven Werturteile des Entscheiders überprüft werden kann (nur Sie können für sich entscheiden, ob z.B. Ihre Präferenz für technisches Geschick von der Ausprägung bzgl. Zuverlässigkeit unabhängig ist oder nicht), können wir hier keine „allgemeingültige" Lösung angeben. Zudem müßte der Entscheider vorher die Skalen und Bandbreiten für die einzelnen Attribute festlegen.

Aufgabe 6.2

Egon Ewig sucht eine Wohnung an seinem neuen Studienort. Er verfolgt dabei die beiden Ziele „Möglichst geringe Monatsmiete" und „Möglichst nahe an der Uni". Die Angebote schwanken in den Mieten von 200 € bis 600 €, die Entfernungen variieren von 0 km bis 7 km. Seine Wertfunktion für Monatsmiete ist linear, die andere Wertfunktion ist im folgenden Diagramm angegeben.



(a) Wodurch könnte ein solcher Verlauf der Wertfunktion für die Entfernung erklärt werden?

(b) Egon empfindet eine Wohnung, die 4 km von der Uni entfernt ist und 300 € kostet, als genau so attraktiv wie eine Wohnung, die nur 2 km von der Wohnung entfernt ist, aber dafür 500 € kostet. Bestimmen Sie daraus die Gewichtungsfaktoren w_1 und w_2 für die beiden Ziele in einer additiven Wertfunktion.

(c) Wie teuer darf eine unmittelbar an der Uni gelegene Wohnung sein, damit Egon diese Wohnung immer noch besser findet als eine Wohnung, die 2 km entfernt ist und 200 € kostet?

Lösung 6.2

(a) Zunächst ist die Frage zu beantworten:

Was ist eigentlich auffällig an der dargestellten Kurve?

Auffälligkeit:	Die Funktion wird mit zunehmender Entfernung flacher.
Erklärungsmöglichkeit:	Egon ist kein begeisterter Fußgänger, jedoch liebt er sportliche Herausforderungen. Je länger der Weg wird, desto mehr ärgert er sich zwar beim Wandern. Nur der „Grenzärger" nimmt ab, da er sich mit der Bewältigung einer zunehmenden sportlichen Leistung tröstet.

(b) Gegeben: Ziele
- Miete; Bandbreite = [200 €; 600 €]
- Entfernung; Bandbreite = [0 km; 7 km]

Zwei gleichwertige Alternativen

Verlauf der Wertfunktion

Gesucht: Gewichtungsfaktoren w_1 und w_2

Laut Aufgabenstellung ist Egon indifferent zwischen den Alternativen 4 km Entfernung und 300 € Miete sowie 2 km Entfernung und 500 € Miete:

$\Rightarrow$ (4 km, 300 €) ~ (2 km, 500 €)

Vorgehensweise:

1. Einsetzen der vorhandenen Daten in das additive Modell:

$$w_1 \cdot v_1(4\text{ km}) + w_2 \cdot v_2(300\text{ €}) = w_1 \cdot v_1(2\text{ km}) + w_2 \cdot v_2(500\text{ €})$$
$$w_1 \cdot 0{,}25 + w_2 \cdot 0{,}75 = w_1 \cdot 0{,}5 + w_2 \cdot 0{,}25$$
$$0{,}5 \cdot w_2 = 0{,}25 \cdot w_1$$
$$2 \cdot w_2 = w_1$$

2. Um die Gewichte zu ermitteln, wird das Ergebnis aus (b) in die Bedingung, daß die Summe aller Gewichte gleich 1 ist, eingesetzt:

$$w_1 + w_2 = 1$$
$$2 \cdot w_2 + w_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad w_2 = 1/3; \quad w_1 = 2/3$$

c) Gegeben: 0 km Entfernung (vgl. unmittelbare Nähe)

Gesucht: x €, die die Miete der Wohnung betragen darf, um vor der Alternative (2 km, 200 €) präferiert zu werden.

$$\Rightarrow \; w_1 \cdot v_1(0\text{ km}) + w_2 \cdot v_2(x\text{ €}) > w_1 \cdot v_1(2\text{ km}) + w_2 \cdot v_2(200\text{ €})$$

Für w_1 und w_2 werden die in Aufgabe (b) errechneten Werte eingesetzt:

$$2/3 \cdot 1 + 1/3 \cdot v_2(x\text{ €}) > 2/3 \cdot 0{,}5 + 1/3 \cdot 1$$
$$\Leftrightarrow 1/3 \cdot v_2(x\text{ €}) > 1/3 - 2/3 + 1/3$$
$$\Leftrightarrow 1/3 \cdot v_2(x\text{ €}) > 0$$
$$\Rightarrow \; v_2(x\text{ €}) > 0$$

Laut Aufgabenstellung beträgt die höchste Miete 600 € und ist somit gleich dem maximal zulässigen x, d.h. die unmittelbar an der Uni gelegene Wohnung darf bis zu 600 € kosten, um noch der Alternative (2 km, 200 €) vorgezogen zu werden.

Aufgabe 6.3

Manager Viktor Vorndran will sich einen tragbaren Computer für die Reise anschaffen. In die engere Wahl zieht er fünf technisch etwa gleichwertige Geräte. Die Auswahl zwischen diesen möchte er allein anhand der Merkmale Batterielebensdauer und Gewicht treffen.

(a) Der Manager geht in ein Fachgeschäft, um sich die Daten zu beschaffen. Er erklärt dem Verkäufer: „Geringes Gewicht des Geräts ist mir wichtiger als eine lange Batterielebensdauer.“ Kommentieren Sie diese Aussage.

(b) Das Entscheidungsproblem soll mittels einer additiven Wertfunktion gelöst werden. Zu diesem Zweck ermittelt Viktor je eine Einzelwertfunktion
- für die Batterielebensdauer im Bereich 0 bis 8 Stunden,
- für das Gewicht im Bereich 0 bis 6 Kilogramm.

Skizzieren sie plausible Verläufe dieser beiden Funktionen und erläutern Sie sie.

(c) Angenommen, die Einzelwertfunktionen des Managers seien gradlinig. Die schlechteste Ausprägung habe jeweils den Wert 0, die beste den Wert 1. Nun müssen die Gewichte der beiden Attribute bestimmt werden. Viktor Vorndran kommt zu dem Ergebnis, daß ihm ein Computer mit 2 kg Gewicht und 4 Stunden Batterienutzung genau so viel wert ist wie einer mit 3 kg Gewicht und 6 Stunden Batterienutzung. Welche Gewichtungsfaktoren lassen sich aus dieser Aussage ableiten?

Lösung 6.3

a) „Übersetzt“ man den Inhalt der Aussage in einen entscheidungstheoretischen Ausdruck, so erhält man:

Batterielebensdauer $w_1 \leq w_2$ Gewicht

Der Informationsgehalt ist deshalb gering, da jegliche Angabe über eine Bandbreite, innerhalb derer diese Aussage gelten soll, fehlt.

b) Überlegen Sie sich an dieser Stelle die Wertverläufe bezüglich der gegebenen Ziele selbst und skizzieren Sie sie.

c) Gegeben: Ziele
- Gewicht; B = [0 kg, 6 kg]
- Batterielebensdauer; B = [0 h, 8 h]

2 gleichwertige Alternativen
Verläufe der Wertfunktionen

Gesucht: Gewichtungsfaktoren w_1 und w_2

1. Einsetzen der bereits vorhandenen Werte in das additive Modell:

$$w_1 \cdot v_1(4\ h) + w_2 \cdot v_2(2\ kg) = w_1 \cdot v_1(6\ h) + w_2 \cdot v_2(3\ kg)$$
$$w_1 \cdot 1/2 + w_2 \cdot 2/3 = w_1 \cdot 3/4 + w_2 \cdot 1/2$$
$$1/4 \cdot w_1 = 1/6 \cdot w_2$$
$$w_1 = 2/3 \cdot w_2$$

2. Anwenden der Bedingung: Die Summe der Gewichte ist 1:

$$w_1 + w_2 = 1$$
$$2/3 \cdot w_2 + w_2 = 1 \qquad \Rightarrow \quad w_2 = 3/5 \qquad w_1 = 2/5$$

Aufgabe 6.4

Bei der Auswahl zwischen unterschiedlichen Stellenangeboten zieht Dipl.-Kff. Steffi Anlauf drei Attribute in Betracht: „Anfangsgehalt", „Entfernung vom Heimatort" und „Erwartete wöchentliche Arbeitszeit". Sie ist sich sicher, daß diese Merkmale differenzunabhängig sind. Die Tabelle zeigt die Angebote, die sich nach ihrer ersten Vorstellungsrundreise angesammelt haben.

Stellen-angebot	Anfangsgehalt in Tsd. €/Jahr	Entfernung vom Heimatort in km	Arbeitszeit in Std./Woche
a	80	40	60
b	40	20	30
c	50	0	50
d	70	50	55

Die Wertfunktionen verlaufen linear innerhalb der Intervalle [40 Tsd. €/Jahr, 80 Tsd. €/Jahr] bzw. [0 km, 50 km] und [30 Std./Woche, 60 Std./Woche].
Bei der Ermittlung der additiven Wertfunktion kommt Steffi zu folgenden Punktbewertungen:

(40 Tsd. €/Jahr, 50 km, 60 Std./Woche) = 0 Punkte
(40 Tsd. €/Jahr, 0 km, 60 Std./Woche) = 30 Punkte
(80 Tsd. €/Jahr, 50 km, 60 Std./Woche) = 70 Punkte
(40 Tsd. €/Jahr, 50 km, 30 Std./Woche) = 100 Punkte

(a) Welches Verfahren hat Steffi angewendet?
(b) Welche Werte w_1, w_2 und w_3 lassen sich ermitteln und welches Angebot ist das beste?
(c) Steffi fühlt sich von dem Ergebnis etwas verunsichert und möchte ihre Punktbewertungen weniger exakt angeben. Sie ist sicher, daß, wenn sie die oben angegebenen extremen Alternativen mit null bzw. 100 Punkten bewertet, folgende Intervalle für die Punktbewertung der mittleren beiden hypothetischen Jobangebote in jedem Fall richtig sind:
(40 Tsd. €/Jahr, 0 km, 60 Std./Woche) = 20-30 Punkte
(80 Tsd. €/Jahr, 50 km, 60 Std./Woche) = 60-80 Punkte.
Kann Steffi Anlauf erkennen, welche Offerte die beste ist?

Lösung 6.4

a) Um das angewendete Verfahren herauszufinden, werden die Punktbewertungen formalisiert:

(1) $w_1 \cdot 0 + w_2 \cdot 0 + w_3 \cdot 0 = 0$
(2) $w_1 \cdot 0 + w_2 \cdot 1 + w_3 \cdot 0 = 30$
(3) $w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 0 + w_3 \cdot 0 = 70$
(4) $w_1 \cdot 0 + w_2 \cdot 0 + w_3 \cdot 1 = 100$

→ Es wurde das *Swing-Verfahren* angewendet.

Ausgangspunkt ist die Extremalternative a, die in allen Attributen das schlechteste Ergebnis besitzt. Sie bekommt den Punktwert 0. Dann wird jeweils ein Attribut auf den Optimalwert 1 „geswingt" und es werden dem Entscheider die so entstehenden Alternativen b,c und d präsentiert. Den Alternativen werden von ihm dann Punkte zwischen 100 und 0 zugeordnet.

b) Gegeben: - Ziele: Anfangsgehalt, Entfernung, Arbeitszeit
- Punktbewertungen

Gesucht: - Gewichte w_1, w_2 und w_3
- bestes Angebot

Bestimmung der Werte der Zielausprägungen:

B = [40 Tsd. €, 80 Tsd. €]
$v(40) = 0 \quad v(50) = 0{,}25 \quad v(60) = 0{,}5 \quad v(70) = 0{,}75 \quad v(80) = 1$

B = [0 km, 50 km]
$v(0) = 1$ $v(10) = 0{,}8$ $v(20) = 0{,}6$ $v(30) = 0{,}4$ $v(40) = 0{,}2$ $v(50) = 0$

B = [30 h, 60 h]
$v(30) = 1$ $v(40) = 0{,}66$ $v(50) = 0{,}33$ $v(55) = 0{,}165$ $v(60) = 0$

Berechnung der Gewichte:

normierte Gewichte		Punktbewertungen
$w_1 = 70/200$	$= 0{,}35$	70
$w_2 = 30/200$	$= 0{,}15$	30
$w_3 = 100/200$	$= 0{,}5$	100

Im folgenden kann mit den normierten Gewichten oder den Punktbewertungen gerechnet werden.

Bewertung der Alternativen:

$$v(a) = 0{,}35 \cdot v_1(80) + 0{,}15 \cdot v_2(40) + 0{,}5 \cdot v_3(60)$$
$$= 0{,}35 \cdot 1 + 0{,}15 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0 = 0{,}38$$

b - d werden analog zu a berechnet:
$v(b) = 0{,}59$
$v(c) = 0{,}40$
$v(d) = 0{,}35$

$\Rightarrow$ Wähle Alternative b.

c) Das Problem besteht darin, daß die Informationen über die Gewichte unvollständig sind.

Allgemeines Verfahren:

1. Menge an unvollständigen Informationen festlegen

hier: (40/0/60) = 20-30 Punkte $\Rightarrow$ $w_2 = 20\text{-}30$
(80/50/60) = 60-80 Punkte $\Rightarrow$ $w_1 = 60\text{-}80$

2. Durchführen eines Dominanztests für alle Paare von Alternativen:

Frage: Wann ist Dominanz zwischen zwei Alternativen gegeben?
$a \succeq_{V(I)} b$

wobei
V(I) = Menge aller Wertfunktionen, die mit I vereinbar sind
I = Menge der unvollständigen Informationen (Intervallangaben).

Folgende Aussage ist zu überprüfen:
$$\text{Min}_{\,V \in V(I)} (v(a) - v(b)) \geq 0$$

Anwendung auf die Aufgabenstellung:

Dominiert a b? Minimiere v(a) – v(b):

$$w_1 (v_1(a_1) - v_1(b_1)) + w_2 (v_2(a_2) - v_2(b_2)) + w_3 (v_3(a_3) - v_3(b_3))$$
$$= w_1 (v_1(80) - v_1(40)) + w_2 (v_2(40) - v_2(20)) + w_3 (v_3(60) - v_3(30))$$
$$= w_1 (1 - 0) + w_2 (0{,}2 - 0{,}6) + w_3 (0 - 1)$$
$$= w_1 - 0{,}4\, w_2 - w_3$$

Ordne jedem positiven Koeffizienten die Mindestpunktzahl der Bandbreite von b_i, jedem negativen Koeffizienten die Maximalpunktzahl zu. Ergibt sich hieraus ein negativer Zielfunktionswert, so liegt keine Dominanz vor:

$60 - 30 \cdot 0{,}4 - 100 \leq 0$
$-52 \leq 0$ $\Rightarrow$ a dominiert b nicht!

Dominiert b a ? Minimiere v(b) – v(a)

$$w_1 (0 - 1) + w_2 (0{,}6 - 0{,}2) + w_3 (1 - 0)$$
$$= -w_1 + 0{,}4\, w_2 + w_3$$
$$= -80 + 0{,}4 \cdot 20 + 100$$
$= 28 \geq 0$ $\Rightarrow$ b dominiert a!

Da die beste Alternative gesucht wird, werden die dominierten Alternativen eliminiert
Gemäß dem oben vorgeführten Schema sind im ungünstigsten Fall (keine weitere dominante Alternative kann gefunden werden) folgende Dominanztests durchzuführen:

b c
c b
b d
d b
c d
d c (Ausführung analog)

Aufgabe 6.5

Bei der Auswahl zwischen verschiedenen Wäscheschleudern interessieren den Maschinenbaustudenten Peter Singel nur die Kriterien „Umdrehungen pro Minute" und „Fassungsvermögen in kg". Bezüglich beider Merkmale hat er linear steigende Einzelwertfunktionen. Bei Bandbreiten von 600 bis 1.400 Umdrehungen bzw. 3 bis 5,5 kg Fassungsvermögen bestimmt Singel die Gewichtungsfaktoren 0,6 für Umdrehungen und 0,4 für Fassungsvermögen. Bei einer Erkundung der aktuellen Sonderangebote stellt er fest, daß keine Schleuder mit mehr als 1.200 Umdrehungen zu bekommen ist. Hat dies Auswirkungen auf die Gesamtwertfunktion? Wenn ja, welche?

Lösung 6.5

Gegeben:	Umdrehungen	$w_1 = 0{,}6$	$B_U = [600, 1400]$
	Fassungsvermögen	$w_2 = 0{,}4$	$B_F = [3, 5{,}5]$
	Änderung Bandbreite		$B'_U = [600, 1200]$

Korrektur der Gewichte:

1. $w_{1\ neu} = \dfrac{0{,}6 \cdot M}{0{,}4 + 0{,}6 \cdot M} \qquad w_{2\ neu} = \dfrac{0{,}4}{0{,}4 + 0{,}6 \cdot M}$

2. $M_{\text{(Korrekturfaktor)}} = \Delta v(B'_U) = v_1(1200) - v_1(600) = 0{,}75 - 0 = 0{,}75$

oder: $\dfrac{1200-600}{1400-600} = \dfrac{600}{800} = \dfrac{3}{4}$

2. in 1. eingesetzt:

$$w_{1\ neu} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}75}{0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}75} = \frac{0{,}45}{0{,}85} \approx 0{,}53 \qquad w_{2\ neu} = \frac{0{,}4}{0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}75} = \frac{0{,}4}{0{,}85} \approx 0{,}47$$

Aufgabe 6.6

Gelegenheitstaucher Leo Prehn wünscht sich zum Geburtstag eine neue Uhr. Er teilt seiner Freundin mit, worauf es ihm ankommt: (1) Möglichst niedriger Preis, (2) möglichst lange Garantiedauer und (3) möglichst große Wassertiefe, bis zu der die Uhr dicht ist. Diese Attribute empfindet er als differenzunabhängig. Nach einem Informationsgang hält er folgende Ausprägungsintervalle für relevant: Preise von 50 bis 200 €, Garantie von vier bis 16 Jahren, Wassertiefe von zehn bis 50 Metern. Die Einzelwertfunktionen teilt er seiner Freundin wie folgt mit:

$v_1(x_1) = a + b/x_1$

$v_2(x_2) = c + d\sqrt{x_2}$

$v_3(x_3) = e + fx_3$.

(a) Ermitteln Sie die auf [0, 1] normierten Einzelwertfunktionen, also deren Parameter *a* bis *f*.

(b) Was müßte Leo auf die folgenden Fragen antworten, um konsistent zu sein?
- Auf welchen Betrag müßte der Preis, ausgehend von 50 €, steigen, damit sich der Wert (des Preises) halbiert?
- Welcher Übergang ist mehr wert, der von vier auf neun Jahre Garantie oder der von neun auf 16 Jahre?

(c) Leo teilt seiner Freundin auch noch folgende Indifferenzen mit:
(200 €, 16 Jahre, 12 Meter) ~ (80 €, 4 Jahre, 12 Meter)
(70 €, 16 Jahre, 10 Meter) ~ (70 €, 4 Jahre, 35 Meter).
Wie lautet Leos multiattributive Wertfunktion?

Lösung 6.6

Gegeben:	- Preis	$v_1(x_1) = a + b/x_1$
		$B_P = [50\text{ €}, 200\text{ €}]$
	- Garantie	$v_2(x_2) = c + d \cdot \sqrt{x_2}$
		$B_G = [4\text{ J}, 16\text{ J}]$
	- Tiefe	$v_3(x_3) = e + f \cdot x_3$
		$B_T = [10\text{ m}, 50\text{ m}]$

a)
$1 = a + b/50 \iff 50 = 50a + b$
$0 = a + b/200 \iff 0 = 200a + b \iff b = -200a$
$\Rightarrow a = 50/-150 = -1/3; \quad b = 200/3$

$1 = c + d \cdot \sqrt{16} \iff 1 = c + 4d$
$0 = c + d \cdot \sqrt{4} \iff 0 = c + 2d \iff c = -2d$
$\Rightarrow 1 = -2d + 4d \Rightarrow d = 1/2; \quad c = -1$

$1 = e + f \cdot 50 \iff e = -10f$
$0 = e + f \cdot 10 \iff 1 = -10f + 50f = 40f$
$\Rightarrow f = 1/40; \quad e = -1/4$

b) Auf welchen Betrag muß der Preis steigen, damit sich der Wert halbiert?

Gesucht: $v_1(x) = 0{,}5$

$\Rightarrow 0{,}5 = a + b/x$
$\Rightarrow (0{,}5 - a) \cdot x = b$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{b}{\frac{1}{2} - a} = \frac{\frac{200}{3}}{\frac{1}{2} - (-\frac{1}{3})} = \frac{\frac{400}{6}}{\frac{3}{6} + \frac{2}{6}} = \frac{400}{5} = 80$$

Welcher Übergang ist mehr wert, der von 4 auf 9 Jahre oder der von 9 auf 16 Jahre?

$$v_2(4) - v_2(9) \overset{?}{=} v_2(9) - v_2(16)$$
$$0 - 0{,}5 = 0 - 0{,}5$$

Beide Übergänge sind gleichwertig.

c) Gesucht: Zielgewichte

Indifferenzaussagen:
(200 €, 16 J, 12 m) ~ (80 €, 4 J, 12 m)
(70 €, 16 J, 10 m) ~ (70 €, 4 J, 35 m)

$w_1 \cdot v_1(200) + w_2 \cdot v_2(16) + w_3 \cdot v_3(12) = w_1 \cdot v_1(80) + w_2 \cdot v_2(4) + w_3 \cdot v_3(12)$
$\Rightarrow w_1 \cdot 0 + w_2 \cdot 1 + w_3 \cdot 0{,}05 = w_1 \cdot 0{,}5 + w_2 \cdot 0 + w_3 \cdot 0{,}05$
$\Rightarrow w_2 = 0{,}5 w_1$

$\Rightarrow$ I. $w_1 = 2w_2$

$w_1 \cdot v_1(70) + w_2 \cdot v_2(16) + w_3 \cdot v_3(10) = w_1 \cdot v_1(70) + w_2 \cdot v_2(4) + w_3 \cdot v_3(35)$
$\Rightarrow w_2 \cdot 1 + w_3 \cdot 0 = w_2 \cdot 0 + w_3 \cdot 25/40$

$\Rightarrow$ II. $w_2 - 5/8 w_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8/5 w_2 = w_3$

I. und II. in $w_1 + w_2 + w_3 = 1$:

$2w_2 + w_2 + 8/5 w_2 = 1$

$\Rightarrow \quad w_2 = 5/23 \quad w_3 = 8/23 \quad w_1 = 10/23$

Aufgabe 6.7

Die Entscheidung für eine Fotokamera soll nach den vier Attributen Preis, Bildqualität, Ausstattung und Verarbeitung getroffen werden. In die engere Wahl kommen drei Kameras. Sie erfüllen die Anforderungen wie in der Tabelle angegeben.

	Preis	Bildqualität	Ausstattung	Verarbeitung
Modell A	0	0,8	1	0,9
Modell B	0,2	1	0	1
Modell C	1	0	0,5	0

Der Käufer hält die Bedingungen für ein additives Modell für erfüllt. Ihm sind bei den gegebenen Ausprägungsintervallen die Attribute Bildqualität, Ausstattung und Verarbeitung gleich wichtig. Unschlüssig ist er sich nur, wie er das Gewicht des Preises im Verhältnis zu den anderen Gewichten ansetzen soll. Führen Sie eine Sensitivitätsanalyse durch, die erkennen läßt, in welchen Bereichen des Gewichts für den Preis welche Kamera optimal ist.

Lösung 6.7

Welche Zielinformationen liefert der Aufgabentext?

1. *Zuordung der Zielgewichte zu den einzelnen Attributen:*

Preis: Gewicht w_1
Bildqualität: Gewicht w_2
Ausstattung: Gewicht w_3
Verarbeitung: Gewicht w_4

Gegeben: $w_2 = w_3 = w_4$

2. *Einsetzen der Werte für die drei Kameramodelle in das additive Modell:*

I: $v(A) = w_1 \cdot 0 + w_2 \cdot 0{,}8 + w_2 \cdot 1 + w_2 \cdot 0{,}9 = 2{,}7w_2$

[Anmerkung: Da $w_2 = w_3 = w_4$, ist es möglich, diese und die folgenden Gleichungen nur mit den Gewichten w_1 und w_2 aufzustellen (w_2 ersetzt w_3 und w_4). Dies ist notwendig, um im weiteren Verlauf eine Variable isolieren zu können.]

II: $v(B) = w_1 \cdot 0{,}2 + w_2 \cdot 1 + w_2 \cdot 0 + w_2 \cdot 0 + w_2 \cdot 1 = 0{,}2w_1 + 2w_2$

III: $v(C) = w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 0 + w_2 \cdot 0{,}5 + w_2 \cdot 0 = w_1 + 0{,}5w_2$

3. *Bestimmung der Werte für w_1 und w_2:*

Da die Summe aller Gewichte immer 1 ergeben muß und da $w_2 = w_3 = w_4$, ergibt sich Gleichung

IV: $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = w_1 + 3w_2 = 1 \;\Rightarrow\; w_2 = 1/3 - 1/3w_1$

4. *Einsetzen:*

IV in I: $v(A) = 0{,}9 - 0{,}9w_1$
IV in II: $v(B) = 0{,}2w_1 + 2/3 - 2/3w_1 \approx 0{,}66 - 0{,}46w_1$
IV in III: $v(C) = w_1 + 1/6 - 1/6w_1 \approx 0{,}16 + 0{,}83w_1$

5a. *Bestimmung der Dominanzintervalle der Alternativenpaare (Rechnerische Sensitivitätsanalyse):*

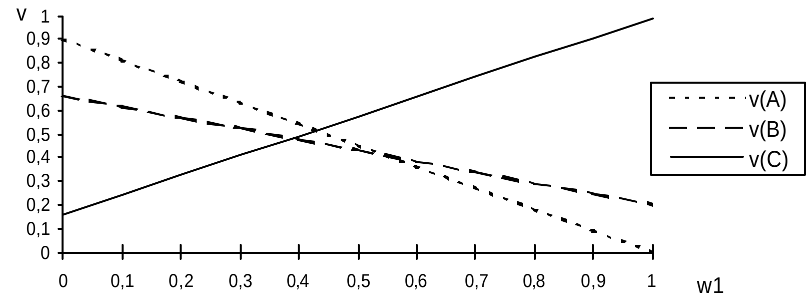
a) $v(A) \geq v(B)$
$0{,}9 - 0{,}9w_1 \geq 0{,}66 - 0{,}46w_1$
$0{,}23 - 0{,}44w_1 \geq 0$
$0{,}53 \geq w_1$

b) $v(B) \geq v(C)$
$0{,}66 - 0{,}46w_1 \geq 0{,}16 + 0{,}83w_1$
$0{,}5 \geq 1{,}29w_1$
$0{,}39 \geq w_1$

c) $v(A) \geq v(C)$
$0{,}9 - 0{,}9w_1 \geq 0{,}16 + 0{,}83w_1$
$0{,}74 \geq 1{,}73w_1$
$0{,}43 \geq w_1$

Ist $w_1 \leq 0{,}43$, so ist das Kameramodell A optimal, ist $w_1 \geq 0{,}43$ Modell C!

5b. *Grafische Sensitivitätsanalyse:*



Aufgabe 6.8

Bei der Beurteilung eines Gerätes spielen vier Attribute eine Rolle: Funktion *(X_1)*, Sicherheit *(X_2)*, Geräusch *(X_3)* und Preis *(X_4)*. In die engere Wahl kommen drei Modelle, *a*, *b* und *c*. Bezüglich der zugrundeliegenden Ausprägungsintervalle kommt das Expertenteam, das mit der Vorbereitung der Kaufentscheidung betraut ist, zu den Gewichtungsfaktoren $w_1 = 0{,}4$, $w_2 = 0{,}25$, $w_3 = 0{,}15$ und $w_4 = 0{,}20$. Die Experten gelangen nach einigem Diskutieren zu dem Schluß, daß das Attribut „Funktion" zu global ist, um die unterschiedlichen Geräte eindeutig bewerten zu können, und spalten dieses Attribut in drei Subattribute auf, X_{11}, X_{12} und X_{13}. Nach einer erneuten Gewichtungsprozedur erhält man

$w_{11} = 0{,}25$ $w_2 = 0{,}20$
$w_{12} = 0{,}12$ $w_3 = 0{,}11$
$w_{13} = 0{,}16$ $w_4 = 0{,}16$.

Den Experten gelingt es nicht, die Inkonsistenz zwischen den beiden Gewichtungen zu beseitigen. Sie beschließen daher, alle Gewichte für zulässig zu halten, die in den durch die beiden Messungen gezogenen Grenzen liegen, und zu untersuchen, ob sich eine oder gar zwei der drei Alternativen als dominiert identifizieren lassen. Die Tabelle gibt die Einzelbewertungen der Alternativen bezüglich der sechs Attribute wieder.

	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_2	X_3	X_4
a	1	0,7	0	1	0	0,3
b	0	0	0,8	0,6	1	1
c	0,6	1	1	0	0,8	0

Schreiben Sie den Optimierungsansatz hin, mit dem geprüft werden kann, ob Alternative *a* Alternative *b* bezüglich der vorliegenden Information dominiert. Probieren Sie „von Hand", ob Sie eine der Alternativen als dominiert erkennen können.

Lösung 6.8

Optimierungsansatz: Minimiere
$w_{11}(1-0) + w_{12}(0{,}7-0) + w_{13}(0-0{,}8) + w_2(1-0{,}6) + w_3(0-1) + w_4(0{,}3-1)$!

Nebenbedingungen:

$w_{11} \leq 0{,}25$
$w_{12} \leq 0{,}12$
$w_{13} \leq 0{,}16$
$w_{11} + w_{12} + w_{13} \geq 0{,}4$
$0{,}2 \leq w_2 \leq 0{,}25$
$0{,}11 \leq w_3 \leq 0{,}15$
$0{,}16 \leq w_4 \leq 0{,}2$
$w_{11} + w_{12} + w_{13} + w_2 + w_3 + w_4 = 1$

Wahrscheinlichkeitsintervalle auf Basis beider Gewichtungen:
$w_{11} = [0{,}4 \cdot 0{,}25/0{,}53 = 0{,}19 \mid 0{,}25]$
$w_{12} = [0{,}4 \cdot 0{,}12/0{,}53 = 0{,}09 \mid 0{,}12]$
$w_{13} = [0{,}4 \cdot 0{,}16/0{,}53 = 0{,}12 \mid 0{,}16]$
$w_2 = [0{,}2 \mid 0{,}25]$
$w_3 = [0{,}11 \mid 0{,}15]$
$w_4 = [0{,}16 \mid 0{,}20]$

Dominiert a c?
$w_{11} \cdot (1-0{,}6) + w_{12} \cdot (0{,}7-1) + w_{13} \cdot (0-1) + w_2 \cdot (1-0) + w_3 \cdot (0-0{,}8)$
$+ w_4 \cdot (0{,}3-0)$
$\Leftrightarrow\ 0{,}4w_{11} - 0{,}3w_{12} - w_{13} + w_2 - 0{,}8w_3 + 0{,}3w_4$
$\Leftrightarrow\ 0{,}4 \cdot 0{,}19 - 0{,}3 \cdot 0{,}12 - 0{,}16 + 0{,}2 - 0{,}8 \cdot 0{,}15 + 0{,}3 \cdot 0{,}16 = 0{,}008$
Da $\Sigma w_i = 0{,}98 \Rightarrow$ Korrektur von w_4 (da kleinster positiver Koeffizient)
$\Leftrightarrow\ 0{,}4 \cdot 0{,}19 - 0{,}3 \cdot 0{,}12 - 0{,}16 + 0{,}2 - 0{,}8 \cdot 0{,}15 + 0{,}3 \cdot 0{,}18 = 0{,}014 > 0$
$\Rightarrow$ a dominiert c!

Dominiert a b?
$w_{11} \cdot (1-0) + w_{12} \cdot (0{,}7-0) + w_{13} \cdot (0-0{,}8) + w_2 \cdot (1-0{,}6) + w_3 \cdot (0-1)$
$+ w_4 \cdot (0{,}3-1)$
$\Leftrightarrow\ w_{11} + 0{,}7w_{12} - 0{,}8w_{13} + 0{,}4w_2 - w_3 - 0{,}7w_4$
$\Leftrightarrow\ 0{,}19 + 0{,}7 \cdot 0{,}09 - 0{,}8 \cdot 0{,}16 + 0{,}4 \cdot 0{,}2 - 0{,}15 - 0{,}7 \cdot 0{,}2 = -0{,}085$
Da $\Sigma w_i = 0{,}99 \Rightarrow$ Korrektur von w_2 (da kleinster positiver Koeffizient)
$\Leftrightarrow\ 0{,}19 + 0{,}7 \cdot 0{,}09 - 0{,}8 \cdot 0{,}16 + 0{,}4 \cdot 0{,}21 - 0{,}15 - 0{,}7 \cdot 0{,}2 = -0{,}081 < 0$
$\Rightarrow$ a dominiert b nicht!

Dominiert b a?
$-w_{11} - 0{,}7w_{12} + 0{,}8w_{13} - 0{,}4w_2 + w_3 + 0{,}7w_4$
$\Leftrightarrow\ -0{,}25 - 0{,}7 \cdot 0{,}12 + 0{,}8 \cdot 0{,}12 - 0{,}4 \cdot 0{,}25 + 0{,}11 + 0{,}7 \cdot 0{,}16 = -0{,}076 < 0$
Da $\Sigma w_i = 1{,}01 \Rightarrow$ Korrektur von w_2 (da größter negativer Koeffizient)
$\Leftrightarrow\ -0{,}25 - 0{,}7 \cdot 0{,}12 + 0{,}8 \cdot 0{,}12 - 0{,}4 \cdot 0{,}24 + 0{,}11 + 0{,}7 \cdot 0{,}16 = -0{,}112 < 0$
$\Rightarrow$ b dominiert a nicht!

Fazit: a dominiert c, zwischen a und b ist keine Dominanz feststellbar.